Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 1

УДК 513.83 МАТЕМАТИКА

Е. ЩЕПИН

АКСИОМАТИКА РАЗМЕРНОСТИ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 2 VI 1972)

В этой заметке излагается система аксиом, характеризующая размерность метризуемых пространств. Эта аксиоматика получена мною посредством усиления данной П. С. Александровым [1, 2] системы аксиом для размерности компактов, а именно заменой фигурирующей у П. С. Александрова аксиомы конечной суммы аксиомой счетной суммы.

Определение [1]. Размерностной функцией (определенной на данном классе $\mathfrak{X}$ топологических пространств* X) называется всякая функция d, удовлетворяющая следующим условиям:

1) Аксиома целочисленности. Значение функции d для каждого пространства X класса $\mathfrak{X}$ есть или целое число $d(X) \geqslant -1$, или символ $d(X) = \infty$, причем полагается $\infty > n$ для всякого целого числа n.

2) Аксиома нормировки. Для пустого пространства $X = \phi$ и только для него $d(X) = -1$; для n-мерного замкнутого симплекса T^n имеем $d(T^n) = n$.

3) Аксиома топологической инвариантности. Для гомеоморфных между собою пространств X_1 и X_2 всегда $d(X_1) = d(X_2)$.

4) Аксиома конечной суммы. Если $X = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 — замкнутые подпространства пространства X (и X, X_1, X_2 — пространства класса $\mathfrak{X}$), то $d(X) = \max(dX_1, dX_2)$.

5) Аксиома Брауэра. Если $d(X)$ конечно, то существует такое конечное открытое покрытие ω пространства X, что для всякого пространства Y (класса $\mathfrak{X}$), являющегося образом пространства X при каком-либо непрерывном ω-отображении** всегда $dY \geqslant d(X)$.

Теорема (П. С. Александров). *Размерность* $\dim X$ *(в обычном смысле Брауэра — Урысона — Менгера) есть единственная определенная на классе компактов размерностная функция, удовлетворяющая следующему условию:*

6) *Аксиома Пуанкаре. Если для данного пространства X (класса $\mathfrak{X}$) значение $d(X)$ конечно, то существует замкнутое множество $X' \subset X$, для*

---

* В действительности мы будем рассматривать лишь класс метризуемых пространств и его подкласс, состоящий из всех компактов, лишь мимоходом будет упомянут класс бикомпактов. Во всяком случае вместе с каким-либо пространством X класс $\mathfrak{X}$ всегда содержит и всякое замкнутое подпространство $X' \subset X$; кроме того, класс $\mathfrak{X}$ содержит все замкнутые симплексы.

** Под ω-отображением пространства X на пространство Y понимается отображение f, при котором каждая точка $y \in Y$ имеет окрестность Oy, прообраз $f^{-1}Oy$ которой содержится хотя бы в одном элементе покрытия ω. Если речь идет о компактах, то аксиому Брауэра можно эквивалентным образом сформулировать и так:

Если $d(X)$ конечно, то существует такое число $\varepsilon > 0$, что для всякого компакта Y, *являющегося образом* (метризованного) компакта X при каком-либо ε-отображении всегда $d(Y) \geqslant d(X)$. При этом ε-отображением называется такое отображение $f: X \to Y$, при котором прообраз $f^{-1}y$ у каждой точки $y \in Y$ имеет диаметр $< \varepsilon$ (в метрике, данной в X).

Брауэр доказал, что только что сформулированное свойство выполнено, если X есть n-мерный куб, $Y \subset X$ и ε равно половине длины ребра куба. Именно это предложение является основой данного Брауэром доказательства [3] теоремы об инвариантности числа измерений эвклидова пространства R^n.

которого $d(X') < d(X)$ *и которое разбивает пространство* X (*т. е.* $X \setminus X'$ *несвязно*).

Замечание. П. С. Александров заметил [1], что размерность $\dim X$ есть наибольшая из всех размерностных функций, определенных на классе компактов; кроме того, он показал [2], что не существует никакой размерностной функции, определенной на классе бикомпактов и удовлетворяющей аксиоме Пуанкаре.

В настоящей заметке я рассматриваю размерностные функции, определенные на классе $\mathfrak{X}$ любых метризуемых пространств и удовлетворяющих следующему условию, являющемуся усилением условия 4):

4') Аксиома счетной суммы. *Если пространство* X *есть объединение конечного или счетного числа своих замкнутых множеств* X_k: $X = \bigcup X_k$, *то* $d(X) = \sup d(X_k)$.

Имеет место следующая

Теорема. *Среди всех размерностных функций, определенных на классе метризуемых пространств со счетной базой, размерность* $\dim X$ *есть единственная, удовлетворяющая аксиоме счетной суммы и аксиоме Пункаре.*

Этой теоремой полностью решается проблема аксиоматики размерности для пространств со счетной базой: система аксиом для размерности пространств этого класса состоит из аксиом 1—6.

Сделаем в заключение следующие замечания, касающиеся вопроса о независимости перечисленных выше аксиом.

1) Существует размерностная функция $d(X)$, удовлетворяющая аксиоме Пуанкаре и, следовательно, всем аксиомам 1—6 П. С. Александрова, но не удовлетворяющая аксиоме счетной суммы. Другими словами, аксиоматика П. С. Александрова в ее первоначальном виде не позволяет определить размерность в классе всех (а не только компактных) метризуемых пространств.

2) Существует функция d, определенная на классе компактов, удовлетворяющая аксиомам 1—4, 6, т. е. всем аксиомам П. С. Александрова (включая аксиому Пуанкаре), за исключением аксиомы Брауэра, и, кроме того, удовлетворяющая аксиоме счетной суммы.

3) Общеизвестно, что существуют размерностные функции, удовлетворяющие аксиоме счетной суммы, но не удовлетворяющие аксиоме Пуанкаре: таковы, например, гомологические размерности (отличие от dim).

4) Существует нецелочисленный топологический инвариант, определенный для всех компактов и удовлетворяющий всем аксиомам П. С. Александрова (кроме аксиомы 1).

5) Существует целочисленная функция d, определенная для всех компактов и удовлетворяющая всем аксиомам П. С. Александрова, кроме аксиомы (даже конечной) суммы.

6) Легко доказывается, наконец, что и аксиома нормировки не зависит от остальных аксиом теории размерности.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. S. Alexandrov, Math. Ann., **106**, 161 (1932). [2] П. С. Александров, Тр. Международн. Симпозиума по топологии и ее применениям, Херцег — Нови (Югославия), 25—31, авг., 1968, Београд, 1969, стр. 38. [3] L. E. J. Brouwer, Math. Ann., **70**, 161 (1911).