Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 1

УДК 624.539.52

МЕХАНИКА

М. И. ЭСТРИН

ВАРИАНТ ТЕОРИИ СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 30 IX 1971)

1. В основе предлагаемого варианта теории сложного нагружения лежит представление о возможности ввести на множестве нагружений групповую структуру, причем получающаяся группа должна, очевидно, быть некоммутативной, чтобы описать зависимость напряженного состояния от пути нагружения.

Рассмотрим множество G нагружений малого элемента тела, для которого определен тензор деформаций ε_{ik}, и пусть некоторый элемент g_A множества G преобразует ε_{ik} в ε_{ik}'. Если g_B переводит ε_{ik}' в ε_{ik}'', то произведением g_{AB} нагружений g_A и g_B естественно считать нагружение, переводящее ε_{ik}' в ε_{ik}. Обратным к g_A является нагружение, переводящее ε_{ik}' в ε_{ik}, а тождественным — «нулевое» нагружение, не изменяющее деформаций. Так как нагружения, очевидно, ассоциативны, то G оказывается группой, которую будем называть группой нагружений. Ясно, что эта группа не будет, вообще говоря, топологической. Действительно, приложив к граням элемента малые напряжения $\Delta\sigma_{ik}$, преобразуем ε_{ik} в близкий ε_{ik}'. Если теперь приложить к элементу $-\Delta\sigma_{ik}$, то для пластического тела ε_{ik}' не перейдет в ε_{ik}. Между тем для наших целей чрезвычайно важно оперировать именно с топологическими группами. Этого можно достигнуть, если исходить из модели нелинейно-упругого тела. В этом случае можно говорить о применении аппарата теории топологических групп, причем остается открытым вопрос об учете разгрузки.

Таким образом, будем считать G топологической группой и, более того, группой Ли.

Если задан тензор деформаций ε_{ik0} и приложение напряжений σ_{ik} переводит ε_{ik0} в ε_{ik}, то

$$\varepsilon_{ik} = f_j(\varepsilon_{ik0},\ \sigma_{ik}).$$

Отсюда видно, что в качестве параметров группы G могут быть выбраны напряжения σ_{ik}, а сама группа G должна быть реализована как группа преобразований, действующих на функции от деформаций. Соответствующая группе G алгебра Ли представляет собой алгебру дифференциальных операторов, действующих на функции от ε_{ik}.

Обращаясь к интересующему нас случаю, ограничимся установлением связей между компонентами девиаторов деформаций и напряжений e_{ik} и s_{ik}.

Учитывая тензорный характер s_{ik}, будем описывать напряженное состояние посредством задания второго инварианта девиатора напряжений τ, угла ϑ, определяющего положение проекции на девиаторную плоскость вектора октаэдрического напряжения и трех углов φ_1, φ_2, φ_3 (см. ([1])). Аналогично деформированное состояние зададим вторым инвариантом γ, углом ω и углами ψ_1, ψ_2, ψ_3. Для удобства пользования применяемой в теории групп Ли символикой ([2]) будем использовать следующие отождествления:

$$\gamma = x^1,\quad \omega = x^2,\quad \psi_1 = x^3,\quad \psi_2 = x^4,\quad \psi_3 = x^5,$$

$$\tau = a^1,\quad \gamma = a^2,\quad \varphi_1 = a^3,\quad \varphi_2 = a^4,\quad \varphi_3 = a^5,$$

где все величины будем считать безразмерными, отнесенными к некоторому характерному значению.

Наша задача заключается в отыскании зависимостей

$$x^i = f_i(x_0, a). \tag{1}$$

В общем случае трехосного напряженного состояния группа нагружений будет 5-параметрической группой, зависящей от параметров $a^1, \ldots, a^5$, действующей на функции от переменных $x^1, \ldots, x^5$. Эта группа определяется своей алгеброй Ли, которая в данном случае является алгеброй дифференциальных операторов, действующих на функции от $x^1, \ldots, x^5$. Поэтому алгебра Ли представляет собой линейное векторное пространство с пятью линейно независимыми операторами T_i и произведением

$$[T_i T_k] = T_i T_k - T_k T_i.$$

Операторы T_i имеют смысл операторов малых нагружений, определяемых малыми значениями параметров. Будучи дифференциальными операторами, T_i могут быть представлены в виде $T_i = \xi_i^k(x) \dfrac{\partial}{\partial x^k}$. Произведение $[T_i T_k]$ линейно выражается через T_i:

$$[T_i T_k] = C_{ik}^l T_l. \tag{2}$$

Структурные константы $C_{ik}{}^l$ являются действительными числами. Они должны удовлетворять соотношениям

$$C_{ab}^c = -C_{ba}^c, \quad C_{bc}^d C_{ad}^e + C_{ca}^d C_{bd}^e + C_{ab}^d C_{cd}^e = 0. \tag{3}$$

Если структурные константы $C_{ik}{}^l$ известны, то функции $\xi_i{}^k(x)$, входящие в выражения для операторов T_i, найдутся посредством интегрирования уравнений

$$\xi_a^k \frac{\partial \xi_b^i}{\partial x^k} - \xi_b^k \frac{\partial \xi_a^i}{\partial x^k} = C_{ab}^e \xi_e^i. \tag{4}$$

При известных $\xi_i{}^k(x)$ интересующие нас зависимости (1) определятся из уравнений

$$\partial x^i / \partial a^\alpha = \xi_b^i(x) A_\alpha^b(a); \tag{5}$$

здесь $A_\alpha{}^b(a)$ — вспомогательные функции параметров, удовлетворяющие уравнениям Маурера

$$\partial A_\alpha^e / \partial a^\beta - \partial A_\beta^e / \partial a^\alpha = C_{ab}^e A_\alpha^a A_\beta^b. \tag{6}$$

Обратимся к структуре группы G. Выделим из множества нагружений такие, которые характеризуются изменением двух любых параметров из пяти при неизменных остальных. Очевидно, что множество всех таких нагружений само составляет группу, поскольку результат последовательного нагружения двумя элементами этого множества может быть представлен в виде результата нагружения элементом этого же множества. Таким образом, множество нагружений, определенных двумя любыми параметрами a^i, a^k, образует подгруппу группы нагружений. Соответствующие операторы T_i и T_k образуют подалгебру алгебры Ли.

Следовательно, для любых двух операторов выполняется структурное соотношение вида

$$[T_i T_k] = C_{ik}^i T_i + C_{ik}^k T_k, \tag{7}$$

где константы надо подобрать так, чтобы выполнялись соотношения (3) для всей группы. Это сильно сужает выбор структурных констант. Одной из возможных структур является такая:

$$
\begin{aligned}
&C_{12}^{1} = -C_{12}^{2} = 1, \quad C_{13}^{1} = -C_{13}^{3} = 1, \quad C_{23}^{2} = -C_{23}^{3} = 1,\\
&C_{14}^{1} = -C_{14}^{4} = 1, \quad C_{24}^{2} = -C_{24}^{4} = 1, \quad C_{15}^{1} = -C_{15}^{5} = 1,\\
&C_{25}^{2} = -C_{25}^{5} = 1, \quad C_{45}^{1} = -C_{45}^{5} = 1, \quad C_{53}^{5} = -C_{53}^{3} = 1.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Остальные $C_{ij}^{k} = 0$.

При таком выборе структурных констант все T_i входят в перестановочные соотношения одинаковым образом, поскольку они имеют вид

$$[T_i, T_k] = T_i - T_k. \tag{9}$$

Можно указать простое решение уравнений (4), справедливое при $C_{i(k)}^{l}$, заданных соотношениями (8). Оно имеет вид

$$\xi_i^k = \mu_i^k + x^k, \tag{10}$$

где μ_i^k — произвольные константы, причем $\mu_i^k \neq \mu_j^k$, $i \neq j$, поскольку операторы T_i должны быть линейно независимы.

В общем случае для определения $\xi_i^k(x)$ надлежит интегрировать уравнения (4) при C_{ik}^{l}, заданных формулами (8). Интегралы этих уравнений будут содержать произвольные функции переменных x^i. Аналогично, для отыскания вспомогательных функций $A_\alpha^b(a)$ следует проинтегрировать систему (6). Результат интегрирования будет содержать произвольные функции от a^α. Эти функции должны быть выбраны таким образом, чтобы для некоторого количества выбранных путей нагружения, и в том числе для пропорционального нагружения, зависимости деформаций от напряжений получились совпадающими с экспериментально полученными зависимостями. Очевидно, что таких путей нагружения нужно взять столько, сколько получится произвольных функций в выражениях для ξ_i^k и A_α^b. Если в качестве путей нагружения выбрать такие, при которых каждый раз меняется только один параметр, а остальные остаются неизменными, то соответствующие подгруппы будут однопараметрическими. Дифференциальные уравнения (5) для определения деформаций представляют собой в этом случае систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Представляется интересным реализовать вышеизложенную программу в том случае, когда выражения для ξ_i^k и A_α^b принимают особенно простой вид. С этой целью воспользуемся решением (10), где примем $\mu_i^i = 0$. Рассмотрим сначала нагружение двумя параметрами τ и ϑ. Операторы малых нагружений T_1 и T_2, действующие на функции от γ и ω, примут вид

$$T_1 = \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + (\mu_1^2 + \omega) \frac{\partial}{\partial \omega}, \quad T_2 = (\mu_2^1 + \gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} + \omega \frac{\partial}{\partial \omega}. \tag{11}$$

Для вспомогательных функций A_α^b можно указать простое решение, имеющее вид

$$A_1^1 = -\frac{f'(\tau)}{f(\tau) + g(\omega)}, \quad A_2^2 = -\frac{g'(\omega)}{f(\tau) + g(\omega)}, \quad A_i^k = 0, \quad i \neq k, \tag{12}$$

где f, g — произвольные функции интегрирования.

Учитывая произвол в выборе констант μ_i^k, можно принять $f(0) = \mu_2^1$, $g(0) = \mu_1^2$.

Определим пропорциональное нагружение, как такое нагружение однопараметрической группы параметра τ, которое переводит γ_0 в γ, а ω оставляет неизменным. Тогда для осуществления малого пропорционального нагружения надлежит подействовать оператором T_1 на функции, зависящие от γ. В результате получим уравнение однопараметрической подгруппы пропорционального нагружения

$$d\gamma/d\tau = -\gamma f'(\tau)/(\mu_1^2 + f(\tau)). \tag{13}$$

Так как экспериментальная зависимость $\gamma = \gamma(\tau)$ известна, то из (13) находим $f(\tau)$.

Осуществляя нагружение параметром ϑ, получим систему уравнений соответствующей однопараметрической подгруппы:

$$\frac{d\gamma}{d\vartheta} = -\frac{(\mu_1^2 + \gamma)\, g'(\vartheta)}{\mu_2^1 + g(\vartheta)}, \quad \frac{d\omega}{d\vartheta} = -\frac{\omega g'(\vartheta)}{\mu_2^1 + g(\vartheta)}. \tag{14}$$

Зная экспериментальную зависимость $\gamma(\vartheta)$ (или $\omega(\vartheta)$), получим вторую произвольную функцию g. В общем случае трехосного напряженного состояния вместо (12) будем иметь

$$A_i^i = -h^{i'}(a^i) \Big/ \sum_{k=1}^{5} h^k(a^k), \quad A_i^l = 0, \quad i \neq l. \tag{15}$$

Таким образом, мы имеем пять неизвестных функций. Две из них можно определить из экспериментов с нагружением элемента параметрами τ и ϑ, как это показано выше. Для определения оставшихся трех следует осуществить нагружения параметрами φ_1, φ_2, φ_3. При этом нам в принципе достаточно рассматривать изменение каждый раз какой-либо одной из величин деформаций x^i при изменении одной из φ_i, записывая уравнения из соответствующих однопараметрических подгрупп. Естественнее всего это сделать для элементов ξ_3', ξ_4', ξ_5'. Соответствующие уравнения будут

$$dx'/d\varphi_1 = \xi_3' A_3^3, \quad dx'/d\varphi_2 = \xi_4' A_4^4, \quad dx'/d\varphi_3 = \xi_5' A_5^5. \tag{16}$$

Если зависимости $x'(\varphi_1)$, $x'(\varphi_2)$, $x'(\varphi_3)$ известны из эксперимента, то оставшиеся три произвольные функции могут быть определены.

Таким образом, все $h^k(a^k)$ в выражениях для функций A_i^i можно считать неизвестными, причем способ их определения таков, что операторы T_i оказываются операторами, осуществляющими малые нагружения. Зависимости типа $x^i = f_i(x_0, a)$ находятся посредством интегрирования системы уравнений (5).

Московский вечерний металлургический институт

Поступило 30 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Соколовский, Теория пластичности, М., 1969. [2] Л. П. Эйзенхарт, Непрерывные группы преобразований, ИЛ, 1947.