Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 5

УДК 519.55

МАТЕМАТИКА

В. Н. РЕШЕТНИКОВ

О КОГОМОЛОГИЯХ АЛГЕБРЫ ЛИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА МНОГООБРАЗИИ С НЕТРИВИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 4 V 1972)

Пусть A — произвольный $GL(n;\ \mathbf{R})$-модуль и M — гладкое связное многообразие. Обозначим через α векторное расслоение над M со слоем, изоморфным A, индуцированное касательным расслоением. Через $\mathscr{A}$ обозначим пространство гладких сечений расслоения α. Всякий диффеоморфизм многообразия M в себя индуцирует послойный диффеоморфизм пространства касательного расслоения в себя, а значит, и диффеоморфизм пространства расслоения α в себя. В результате пространство $\mathscr{A}$ оказывается снабженным структурой модуля над группой диффеоморфизмов многообразия M в себя, а значит, и над алгеброй Ли $\mathfrak{A}(M)$ гладких векторных полей многообразия M.

И. М. Гельфанд, Д. Б. Фукс, М. В. Лосик, изучая когомологии алгебры $\mathfrak{A}(M)$ с коэффициентами в $\mathfrak{A}(M)$-модуле $\mathscr{A}$, в стандартном комплексе алгебры $\mathfrak{A}(M)$ выделили подкомплекс, названный диагональным. Гомологии диагонального комплекса в настоящее время достаточно хорошо изучены (см. ([1–4])). Вопрос о вычислении гомологий всего стандартного комплекса оставался открытым (за исключением случая, когда M — окужность, см. ([5], [6])).

В настоящей работе предлагается метод вычисления гомологий всего стандартного комплекса алгебры $\mathfrak{A}(M)$; доказывается, что условие Гельфанда — Фукса конечномерности диагональных гомологий (конечномерность пространства $H^q(L_0;\ A)$, $q\geqslant 0$, где L_0 — алгебра Ли формальных векторных полей в $\mathbf{R}^n$, обращающихся в нуль в начале координат) влечет за собой и конечномерность пространств $H^q(\mathfrak{A}(M);\ \mathscr{A})$, $q\geqslant 0$. В частности, отсюда следует конечномерность когомологий алгебры $\mathfrak{A}(M)$ с коэффициентами в алгебре гладких внешних дифференциальных форм на M.

Пусть $\mathfrak{A}_0$ — алгебра Ли векторных полей на M, обращающихся в нуль в точке $x_0\in M$. В ([5]) для случая $M=S$, где S — окружность, автором был построен изоморфизм

$$H^*(\mathfrak{A};\ C^\infty)=H^*(\mathfrak{A}_0;\ \mathbf{R})\otimes H^*(S;\ \mathbf{R}),$$

где $C^\infty=C^\infty(S)$ — кольцо гладких функций на окружности. Основой настоящей работы служит аналог этого изоморфизма — спектральная последовательность

$$H^*(M;\ \mathbf{R})\otimes H^*(\mathfrak{A}_0;\ A)\Rightarrow H^*(\mathfrak{A};\ \mathscr{A}),$$

построенная в самой общей ситуации.

Через $C^*(\mathfrak{A}(M);\ \mathscr{A})=\bigoplus\limits_q C^q(\mathfrak{A}(M);\ \mathscr{A})$ обозначается, как обычно, пространство коцепей алгебры $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(M)$ с коэффициентами в $\mathfrak{A}$-модуле $\mathscr{A}$.

Рассмотрим пучок $\mathscr{C}_x^q=\mathscr{C}(\mathfrak{A}:\ \mathscr{A}_x)$, порожденный предпучком $U\to C^q(\mathfrak{A};\ \mathscr{A}(U))$, где каждому открытому множеству U покрытия $\{U_\alpha\}$ многообразия M ставится в соответствие пространство q-коцепей алгебры $\mathfrak{A}$ со значениями в $\mathscr{A}(U)$ — пространстве гладких сечений расслоения α, сосредоточенных над U (иначе говоря, $\mathscr{C}_x{}^q$ есть пространство q-коцепей алгебры $\mathfrak{A}$ со значениями в пучке $\mathscr{A}_x$ ростков сечений расслоения α).

Рассмотрим двойной комплекс пучков

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to & C^q(\mathfrak{A}; \mathscr{A}) & \to & \Omega^1(M; \mathscr{C}_x^q) & \xrightarrow{d_2} & \Omega^2(M; \mathscr{C}_x^q) & \to \\ & \downarrow d_1 & & \downarrow d_1 & & \downarrow d_1 & \\ 0 \to & C^{q+1}(\mathfrak{A}; \mathscr{A}) & \xrightarrow{d_2} & \Omega^1(M; \mathscr{C}_x^{q+1}) & \xrightarrow{d_2} & \Omega^2(M; \mathscr{C}_x^{q+1}) & \to \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \end{array} \tag{1}$$

с дифференциалами d_1 и d_2, где d_1 — дифференциал стандартного комплекса коцепей алгебры $\mathfrak{A}$, дифференциал d_2 индуцирован дифференцированием внешних дифференциальных форм; $C^q(\mathfrak{A}; \mathscr{A})$ — пространство q-коцепей алгебры Ли $\mathfrak{A}$, являющееся пространством глобальных сечений пучка $\mathscr{C}_x{}^q$, а $\Omega^p(M; \mathscr{C}_x{}^q)$ — пучок ростков внешних дифференциальных форм на M со значениями в $\mathscr{C}_x{}^q$ (определение внешней дифференциальной формы со значениями в векторном пространстве, например, см. ([8]), гл. V, § 6).

Лемммa 1. *Пучки* $\Omega^p(M; \mathscr{C}_x{}^q) = \Omega^p(M; \mathbf{R}) \times \mathscr{C}_x{}^q$ *локально изоморфны.*

Доказательство. Так как утверждение локально, можно считать, что $M = \mathbf{R}^n$, но в этом случае утверждение леммы очевидно.

Лемма 2. *Пучок* $\mathscr{C}_x{}^q$ *является тонким. В частности,* $H^p(M; \mathscr{C}_x{}^q) = 0$ *при* $p > 0$.

Доказательство. Тонкость пучка следует непосредственно из возможности умножения элементов $\mathscr{C}_x{}^q$ на гладкие функции.

Лемма 3. *Имеет место изоморфизм*

$$H^p(\mathfrak{A}_0; A) = H^p(\mathfrak{A}; \mathscr{A}_x), \qquad p \geqslant 0.$$

Доказательство. Из предложения XIII, 4.2 книги ([7]) следует, что для $p \geqslant 0$, имеет место изоморфизм

$$H^p(\mathfrak{A}_0; A) = H^p(\mathfrak{A}; \mathrm{Hom}_{[\mathfrak{A}_0]}([\mathfrak{A}]; A)),$$

где $[\mathfrak{A}_0]$ и $[\mathfrak{A}]$ — обертывающие алгебры алгебр Ли $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}$ соответственно. Как легко проверить, $\mathrm{Hom}_{[\mathfrak{A}_0]}([\mathfrak{A}]; A) = \mathscr{A}_x$, $x \in M$.

Теорема 1. *Имеет место следующая спектральная последовательность*:

$$H^*(\mathfrak{A}_0; A) \times H^*(M; \mathbf{R}) \Rightarrow H^*(\mathfrak{A}; \mathscr{A}). \tag{2}$$

(Фактически мы не просто утверждаем существование спектральной последовательности, но предлагаем каноническую ее конструкцию.)

Доказательство. Согласно XV, 6 из ([7]), существуют две спектральные последовательности двойного комплекса (1)

$$H_1(H_2(M; \mathscr{C}_x{}^q)) \Rightarrow H(1), \tag{3}$$

$$H_2(\Omega^p(M; H_1)) \Rightarrow H(1), \tag{4}$$

где через $H(1)$ обозначены полные гомологии комплекса (1). В силу леммы 2, спектральная последовательность (3) тривиальна, откуда $H(1) = H^*(\mathfrak{A}; \mathscr{A})$. В силу леммы 1, спектральная последовательность (4) имеет вид

$$H^*(\mathfrak{A}; \mathscr{A}_x) \times H^*(M; \mathbf{R}) \Rightarrow H^*(\mathfrak{A}; \mathscr{A}).$$

Отсюда, используя лемму 3, получаем нужную спектральную последовательность

$$H^*(\mathfrak{A}_0; A) \times H^*(M; \mathbf{R}) \Rightarrow H^*(\mathfrak{A}; \mathscr{A}).$$

Теорема 2. *Пусть A — произвольный, не обязательно конечномерный, $GL(n; \mathbf{R})$-модуль. Если пространства $H^q(L_0; A)$; $q \geqslant 0$, конечномерны в каждой размерности, то и пространства $H^q(\mathfrak{A}, \mathscr{A})$, $q \geqslant 0$, конечномерны в каждой размерности.*

Доказательство. Рассмотрим спектральную последовательность (2). Достаточно доказать, что при наших предположениях конечномерны пространства $H^q(\mathfrak{A}_0; A)$. Рассмотрим точную последовательность алгебр Ли $0 \to \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{A}_0 \xrightarrow{f_0} L_0$, где f_0 — отображение ограничения векторного поля на координационную окрестность точки $x \in M$, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — алгебра Ли векторных полей, обращающихся в нуль в точке $x \in M$ со всеми производными. Отображение $\mathfrak{A}_0 \to L_0 \to gl(n; \mathbf{R})$ превращает пространство A в $\mathfrak{A}_0$-модуль. Получаем следующую спектральную последовательность Серра — Хохшильда:

$$H^*(\widetilde{\mathfrak{A}}; \mathbf{R}) \times H^*(L_0; A) \Rightarrow H^*(\mathfrak{A}_0; A). \qquad (5)$$

Так как пространства $H^q(\widetilde{\mathfrak{A}}; R)$ конечномерны для каждого $q \geqslant 0$ ([6]), то при наших предположениях таковы и пространства $H^q(\mathfrak{A}_0; A)$, $q \geqslant 0$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть A — конечномерный $GL(n; \mathbf{R})$-модуль, тогда пространства $H^q(\mathfrak{A}; \mathscr{A})$, $q \geqslant 0$, конечномерны. В частности, конечномерны пространства $H^q(\mathfrak{A}; \Omega^*(M))$, $q \geqslant 0$, где $\Omega^*(M) = \sum\limits_q \Omega^q(M)$ — алгебра гладких внешних дифференциальных форм на M.*

Доказательство. В ([4]) доказана конечномерность пространства $H^q(L_0; A)$, $q \geqslant 0$, для любого конечномерного $GL(n; \mathbf{R})$-модуля A, откуда по теореме 2 получаем первое утверждение леммы. В частности, если $A = \Lambda^*(\mathbf{R}^n)'$, где $\Lambda^*(\mathbf{R}^n)$ — пространство внешних форм пространства $\mathbf{R}^n$, то $\mathscr{A} = \Omega^*(M; \mathbf{R})$. В ([1]) доказана конечномерность пространств $H^q(L_0; \Lambda^*(\mathbf{R}^n))$ (в ([1]) они просто вычислены), откуда по теореме 2 получаем наше утверждение.

Теорема 3. *Из тривиальности спектральных последовательностей*

$$H^*(\widetilde{\mathfrak{A}}; \mathbf{R}) \otimes H^*(L_0; A) \Rightarrow H^*(\mathfrak{A}_0; A),$$
$$H^*(M; \mathbf{R}) \otimes H^*(L_0; A) \Rightarrow H^*_\Delta(\mathfrak{A}; \mathscr{A})$$

следует тривиальность спектральной последовательности (2), *где $H_\Delta{}^*(\mathfrak{A}; \mathscr{A})$ — диагональные гомологии алгебры Ли $\mathfrak{A}(M)$.*

Доказательство. При наших предположениях спектральная последовательность (2) имеет вид

$$H^*(M; \mathbf{R}) \otimes H^*(\widetilde{\mathfrak{A}}, \mathbf{R}) \otimes H^*(L_0; A) \Rightarrow H^*(\mathfrak{A}; \mathscr{A}).$$

Но так как $H_\Delta(\mathfrak{A}; \mathscr{A}) = H^*(M; \mathbf{R}) \otimes H^*(L_0; A)$ является подалгеброй в $H^*(\mathfrak{A}; \mathscr{A})$, получаем, что элементы $H_*(M; \mathbf{R})$ являются циклами всех дифференциалов спектральной последовательности (2), откуда и следует тривиальность дифференциалов d_r, $r \geqslant 2$, спектральной последовательности (2).

Замечание. Отметим, что для $M = S$, $\mathscr{A} = \Omega^*(S)$ имеет место изоморфизм

$$H^*(\mathfrak{A}(S); \Omega^*(S)) = H_\Delta(\mathfrak{A}; \Omega^*) \otimes H^*(\widetilde{\mathfrak{A}}; R).$$

Было бы интересно перенести этот изоморфизм или построить его аналог для произвольного связного многообразия M и произвольного модуля коэффициентов. На возможность существования такого изоморфизма указывает и теорема 3.

В заключение автор выражает благодарность Д. Б. Фуксу за внимание и помощь в работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, Д. Б. Фукс, Функц. анализ, 4, в. 3, 10 (1970). [2] И. М. Гельфанд, Д. Б. Фукс, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, 2, 322 (1970). [3] И. М. Гельфанд, Д. Б. Фукс, Функц. анализ, 4, в. 4, 70 (1970). [4] М. В. Лосик, Функ. анализ, 4, в. 2, 43 (1970). [5] В. Н. Решетников, УМН, 26, в. 1, 229 (1971). [6] В. Н. Решетников, УМН, 27, в. 1, 251 (1972). [7] А. Картан, С. Эйленберг, Гомологическая алгебра, ИЛ, 1960. [8] С. Стернберг, Лекции по дифференциальной геометрии, М., 1970.