Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 3

УДК 517.946 МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР М. М. ЛАВРЕНТЬЕВ, К. Г. РЕЗНИЦКАЯ

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В настоящей заметке мы рассматриваем обратные задачи (1) для уравнений параболического типа, когда решение считается известным в некоторой фиксированной точке пространства во все моменты времени. Аналогичные задачи для уравнений гиперболического типа были рассмотрены в работах В. Г. Романова (2) и А. С. Благовещенского (3).

1. Пусть $u(x, y, t)$ — решение (обобщенное) уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-q(y)u,$$

удовлетворяющее начальным и краевым условиям

$$u|_{t=0}=\delta(x)\delta(y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \quad u|_\infty=0,$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака, $q(y)$ — непрерывная ограниченная функция, $|q(y)|\leqslant q_0$, q_0 — постоянная.

Обратная задача состоит в определении функции $q(y)$, если известна функция $u(x, y, t)$ при всех $t>0$ в фиксированной точке с координатами $x=x_0$, $y=0$.

Пусть $\varphi(t)=u(x_0, 0, t)$. Отображение L, переводящее $q(y)$ в $\varphi(t)$, является нелинейным. Обратная задача состоит в решении уравнения

$$Lq=\varphi, \tag{1}$$

где φ — заданная ограниченная бесконечно дифференцируемая функция, q — искомая.

Теорема 1. *Решение поставленной обратной задачи единственно в классе непрерывных ограниченных функций.*

2. Пусть $u(\rho, z, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+q(z)u$$

$(\rho\geqslant 0, z\geqslant 0, t\geqslant 0)$ и условиям

$$u|_{t=0}=\delta(z)\delta(\rho), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=0, \quad u|_\infty=0.$$

Пусть задана функция $u(\rho_0, 0, t)=\varphi(t)$. Соотношение между $q(z)$ и $\varphi(t)$ имеет вид (1). Обратная задача состоит в отыскании $q(z)$ по заданной $\varphi(t)$.

Теорема 2. *Решение поставленной обратной задачи единственно в классе непрерывных ограниченных функций.*

3. Пусть $u(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\mu(y)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad -\infty<x<\infty, \quad y\geqslant 0, \quad t\geqslant 0,$$

и условиям

$$u|_{t=0}=\delta(x)\delta(y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \quad u|_\infty=0.$$

Пусть задана $\varphi(t)=u(x_0, 0, t)$. Зависимость между $\mu(y)$ и $\varphi(t)$ имеет вид (1). Обратная задача состоит в нахождении $\mu(y)$ по заданной $\varphi(t)$.

Теорема 3. *Решение поставленной задачи единственно в классе непрерывных, ограниченных, удовлетворяющих условиям*

$$\mu(0)=1, \quad \mu_1 \geqslant \mu(y) \geqslant \mu_0 > 0$$

функций.

4. Пусть $\bar{u}(\rho, z, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\mu(z)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}$$

$(z \geqslant 0, \rho \geqslant 0, t \geqslant 0)$ и условиям

$$u|_{t=0}=\delta(z)\delta(\rho), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=0, \quad u|_\infty=0.$$

Пусть задана $\varphi(t)=u(\rho_0, 0, t)$. Обратная задача состоит в нахождении $\mu(z)$ по заданной $\varphi(t)$.

Теорема 4. *Решение поставленной задачи единственно в классе непрерывных ограниченных функций, удовлетворяющих условиям*

$$\mu(0)=1, \quad \mu_1 \geqslant \mu(y) \geqslant \mu_0 > 0.$$

Доказательство использует преобразование Лапласа и Фурье, спектральную теорию обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и существенно опирается на решение обратной задачи Штурма — Лиувилля ([4], [5]).

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
1 VIII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Лаврентьев, О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосибирск, 1962. [2] В. Г. Романов, Дифференциальные уравнения, 4, № 1, 87 (1968). [3] А. С. Благовещенский, Проблемы матем. физ., в. 1, Л., 1968, стр. 68. [4] М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, М., 1954. [5] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., 15, 4, 297 (1951).