Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 5

УДК 513.82+511

МАТЕМАТИКА

М. И. ШТОГРИН

ОБ ОБЛАСТЯХ ПРИВЕДЕНИЯ ВОРОНОГО, ВЕНКОВА И МИНКОВСКОГО

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 27 III 1972)

Пусть $f(x)=\sum a_{ij}x_ix_j$ — вещественная квадратичная форма с n переменными и $N={}^1/_2 n(n+1)$. Форме $f(x)$ соответствует точка f с координатами a_{ij}, $i\leqslant j$, в N-мерном пространстве E^N. Все точки пространства E^N, которым соответствуют положительные квадратичные формы, в силу условий Сильвестра заполняют N-мерный выпуклый конус $\mathbf{K}$.

Линейное целочисленное унимодулярное преобразование g переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ индуцирует линейное целочисленное унимодулярное преобразование G конуса $\mathbf{K}$ в себя. Преобразования G образуют дискретную группу $\{G\}$, которую называют группой эквивалентности. Отыскание в конусе $\mathbf{K}$ фундаментальной области группы $\{G\}$ — одна из основных задач теории приведения положительных квадратичных форм.

1. Область приведения Вороного (см. ([1]), стр. 213; ([2])). Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ пробегают все системы n целых чисел без общего делителя. Точки $(q_1^2, q_2^2, \ldots, q_n^2, q_1q_2, q_1q_3, \ldots, q_{n-1}q_n)$ лежат на границе конуса $\mathbf{K}$, а их выпуклая оболочка П принадлежит замыканию $\overline{\mathbf{K}}$ конуса $\mathbf{K}$. Границу этой выпуклой оболочки назовем совершенным полиэдром Вороного, или полиэдром П.

Как показал Г. Ф. Вороной, любой луч tf конуса $\mathbf{K}$ имеет и притом лишь одну точку пересечения с полиэдром П. Все $(N-1)$-мерные грани полиэдра П суть обычные выпуклые многогранники с конечным числом граней. Каждой $(N-1)$-мерной грани полиэдра П отвечает так называемая совершенная форма, поэтому и грань назовем совершенной. Полиэдр П инвариантен относительно группы $\{G\}$ и имеет лишь конечное число неэквивалентных совершенных граней.

Рассмотрим какой-либо фиксированный полный набор попарно неэквивалентных совершенных граней полиэдра П. Г. Ф. Вороной называет положительную форму $f(x)$ приведенной, если луч tf пересекает какую-либо из совершенных граней рассматриваемого набора.

Область приведения Вороного нефундаментальна. Для получения фундаментальной области приведения можно поступить так. Рассмотрим так называемое барицентрическое подразделение B(П) полиэдра П. Полиэдр B(П) инвариантен относительно группы $\{G\}$, и его барицентрические симплексы всех измерений при любом преобразовании G могут лишь целиком переходить друг в друга. Вершины одного и того же барицентрического симплекса попарно неэквивалентны, так как являются внутренними точками (центрами тяжести) граней различных измерений полиэдра П. Из сказанного выше и из аффинности преобразований G следует, что внутренние точки одного и того же барицентрического симплекса попарно неэквивалентны.

Рассмотрим полный набор попарно неэквивалентных барицентрических симплексов всех измерений полиэдра B(П). Положительную квадратичную форму $f(x)$ назовем приведенной, если луч tf пересекает какой-либо из барицентрических симплексов рассматриваемого набора во внутренней точке этого симплекса. Любая положительная квадратичная форма, очевидно, эквивалентна одной и только одной такой приведенной форме и, следовательно, множество всех таких приведенных форм представляет собой так называемую абсолютную область приведения.

2. Область приведения Венкова [3]. Пусть $\varphi(x)$ — данная положительная форма, d — ее дискриминант, $\Phi(x)$ — взаимная ей форма. Все точки φ_i, эквивалентные данной точке φ, расположены на так называемой дискриминантной поверхности d. Как известно, дискриминантная поверхность выпукла к началу 0. Во всех точках φ_i (включая и φ) проведем касательные плоскости $(f, \Phi_i) = nd$ к дискриминантной поверхности d и рассмотрим бесконечный выпуклый многогранник, ограниченный этими плоскостями и содержащий рассматриваемую дискриминантную поверхность, т. е. многогранник, определяемый неравенствами $(f, \Phi_i) \geqslant nd$. Поверхность этого бесконечного многогранника назовем полиэдром Венкова.

Как показал Венков, каждый луч tf конуса $\mathbf{K}$ имеет и притом лишь одну точку пересечения с полиэдром Венкова. Все $(N-1)$-мерные грани полиэдра Венкова суть обычные выпуклые многогранники с конечным числом граней, целиком принадлежащие $\overline{\mathbf{K}}$. Полиэдр Венкова инвариантен относительно группы $\{G\}$ и все его $(N-1)$-мерные грани эквивалентны.

Из самого построения полиэдра Венкова следует, что все точки f, принадлежащие его $(N-1)$-мерной грани, касающейся дискриминантной поверхности d в точке φ, удовлетворяют одному равенству $(f, \Phi) = nd$ и всем остальным неравенствам $(f, \Phi_i) \geqslant nd$. Это означает, что все лучи tf, пересекающие рассматриваемую $(N-1)$-мерную грань, принадлежат области приведения Венкова $\mathbf{V}(\varphi)$, которую Венков определял неравенствами $(f, \Phi) \leqslant (f, \Phi_i)$.

Разбиение конуса $\mathbf{K}$ на эквивалентные пирамиды Венкова нормально.

Если форма φ имеет автоморфизмы, то область $\mathbf{V}(\varphi)$ нефундаментальна. Если же φ не имеет автоморфизмов, то область $\mathbf{V}(\varphi)$ фундаментальна, причем в случае $n > 2$ ее можно непрерывно изменять, если надлежащим образом изменять исходную форму φ.

Используя барицентрическое подразделение полиэдра Венкова, из области $\mathbf{V}(\varphi)$, аналогично предыдущему параграфу, можно выделить абсолютную фундаментальную область приведения.

3. Совпадение областей приведения Вороного и Венкова при $n = 3$. Если $\varphi = {}^1/_6(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz)$, то полиэдр Венкова совпадает с полиэдром Π и, следовательно, разбиение конуса $\mathbf{K}$ на пирамиды приведения Венкова совпадает с разбиением на совершенные пирамиды Вороного. Область $\mathbf{V}(\varphi)$ в этом случае нефундаментальна и она совпадает с известной областью приведения Зеллинга (см. [4]).

Покажем далее, что на одной и той же дискриминантной поверхности существует континуум точек φ таких, что область приведения Венкова $\mathbf{V}(\varphi)$ совпадает с фундаментальной областью приведения Вороного (см. [1], стр. 220). Действительно, положим $\Phi = \gamma(x^2 + y^2 + z^2 + \alpha xy + \beta xz + yz)$, где α, β и γ — фиксированные числа, удовлетворяющие неравенствам $0 < \gamma$, $0 < \beta < 2\alpha < 2\beta < 2$. Рассмотрим матрицы

$$S_1'^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2'^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_3'^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_4'^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_5'^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_6'^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

и пусть Φ_i получается из Φ с помощью подстановки $S_i'^{-1}$, т. е. $\Phi_i = \Phi S_i'^{-1}$, где $i = 1, \ldots, 6$. Если $f = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2kxy + 2hxz + 2gyz$, то неравенства $(f, \Phi_i - \Phi) \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, 6$, после сокращения на положительные множители принимают соответственно вид

$$-k \geqslant 0, \quad k-h \geqslant 0, \quad c+k+h+g \geqslant 0,$$
$$b+k+h+g \geqslant 0, \quad a+k+2h \geqslant 0, \quad h-g \geqslant 0.$$

Эти неравенства задают как область приведения Вороного ([1]), так и область приведения Венкова $\mathrm{V}(\varphi)$ ([3]), построенную по форме φ, зависящей от параметров α, β и γ, для которой выписанная выше форма Φ является взаимной.

4. Абсолютная область приведения Вороного при $n=3$. Рассмотрим следующие 16 систем равенств и неравенств между приведенными параметрами g, h, k, l, m, n Зеллинга:

$$\begin{array}{llllll}
0>k, & 0=k, & 0>k, & 0>k, & 0>k, & 0>k,\\
k>h, & k>h, & k=h, & k>h, & k>h, & k>h,\\
k>n, & k>n, & k>n, & k=n, & k>n, & k>n,\\
h>m, & h>m, & n\geqslant m, & h>m, & h=m, & h>m,\\
h>l, & h>l, & h>l, & h>l, & h\geqslant l, & h=l,\\
h>g; & m\geqslant g; & h>g; & l\geqslant g; & l\geqslant g; & m\geqslant g;
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
0>k, & 0=k, & 0=k, & 0>k, & 0>k, & 0=k,\\
k>h, & k=h, & k\geqslant h, & k=h, & k=h, & k>h,\\
k>n, & k>n, & k=n, & m\geqslant n, & k>n, & k\geqslant n,\\
l\geqslant m, & g\geqslant m, & l\geqslant m, & l\geqslant m, & n\geqslant m, & g\geqslant m,\\
h>l, & h>l, & g\geqslant l, & h>l, & h=l, & h=l,\\
h=g; & n\geqslant g; & h>g; & h=g; & m\geqslant g; & h\geqslant g;
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
0>k, & 0=k, & 0>k, & 0>k,\\
k\geqslant h, & k>h, & k\geqslant h, & k=h,\\
k=n, & k>n, & k=n, & k=n,\\
h=m, & h=m, & g\geqslant m, & h>m,\\
g\geqslant l, & h>l, & h=l, & h>l,\\
h\geqslant g; & l\geqslant g; & h>g; & l\geqslant g.
\end{array}$$

Первая из этих систем, состоящая из одних строгих неравенств между параметрами Зеллинга, задает всю внутренность фундаментальной области приведения Вороного, а оставшиеся 15 систем задают все попарно неэквивалентные точки границы фундаментальной области приведения Вороного.

Любая положительная тройничная квадратичная форма эквивалентна одной и только одной форме $f = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2kxy + 2hxz + 2gyz$, где $a=-k-h-l$, $b=-k-g-m$, $c=-h-g-n$, зеллинговы параметры g, h, k, l, m, n которой удовлетворяют одной из выписанных выше 16 систем равенств и неравенств. Заметим, что выписанная здесь форма f положительна при любых не равных одновременно нулю числах g, h, k, l, m, n, удовлетворяющих какой-либо из рассматриваемых выше 16 систем.

Таким образом, все эти 16 систем задают абсолютную фундаментальную область приведения Вороного.

При разыскании этих 16 систем были использованы сорта решеток Б. Н. Делоне (см. ([5]), стр. 176) и их расположение в области приведения Вороного (см. ([4])).

5. Несовпадение областей приведения Минковского ([6]) и Венкова ([3]) при $n \geqslant 3$. Фундаментальная область $\mathbf{M}$ приведения Минковского ([6]) представляет собой выпуклую пирамиду с конечным чис-

лом граней. Покажем, что при $n \geqslant 3$ рабиение $\{\mathbf{M}\}$ конуса $\mathbf{K}$ на пирамиды Минковского не нормально и, следовательно, оно не может совпадать с разбиением на пирамиды Венкова, которое всегда нормально.

Рассмотрим положительные квадратичные формы $f_1(x) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + \ldots + (n+3)x_n^2$, $f_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$, $f_3(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_4$, $f_4(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_4$. Очевидно, минимум форм $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$ равен 1.

Рассмотрим, далее, две формы $f'(x) = x_2^2 + f_1(x) + 2f_2(x) + 2f_3(x)$ и $f''(x) = x_2^2 + f_1(x) + 2f_2(x) + 2f_4(x)$. Легко проверить, что коэффициенты форм $f'(x)$ и $f''(x)$ удовлетворяют одному равенству $a_{22} = a_{33}$ и всем остальным строгим неравенствам приведения Минковского (напомним, что независимых неравенств лишь конечное число). Таким образом, точки f' и f'' лежат внутри одной и той же $(N-1)$-мерной грани Q (расположенной в плоскости $a_{22} - a_{33} = 0$) пирамиды $\mathbf{M}$.

Автоморфизм $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) \to (x_1, x_3, x_2, x_4, \ldots, x_n)$ формы $f'(x)$ индуцирует преобразование конуса $\mathbf{K}$, при котором пирамида $\mathbf{M}$ переходит в эквивалентную ей пирамиду $\mathbf{M}'$, имеющую с $\mathbf{M}$ общую точку f', а автоморфизм $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) \to (-x_1, x_3, x_2, x_4, \ldots, x_n)$ формы $f''(x)$ индуцирует преобразование конуса $\mathbf{K}$, при котором пирамида $\mathbf{M}$ переходит в другую эквивалентную ей пирамиду $\mathbf{M}''$, имеющую с $\mathbf{M}$ общую точку f''. Следовательно, рассматриваемая грань Q пирамиды $\mathbf{M}$ служит примером того, что пирамиды Минковского смежны не по целым $(N-1)$-мерным граням. Таким образом, разбиение $\{\mathbf{M}\}$ конуса $\mathbf{K}$ не нормально, а поэтому оно не совпадает с разбиением на пирамиды Венкова. Следовательно, при $n \geqslant 3$ фундаментальная область $\mathbf{M}$ приведения Минковского ни при каком φ не совпадает с областью $\mathbf{V}(\varphi)$ приведения Венкова.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
21 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Ф. Вороной, О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм, Собр. соч., 2, Киев, 1952, стр. 171. [2] Б. А. Венков, В кн.: Г. Ф. Вороной, Собр. соч., 2, 1952, стр. 379. [3] Б. А. Венков, Изв. АН СССР, сер. матем., № 4, 37 (1940). [4] Б. Н. Делоне, Кристаллография, 5, в. 4, 501 (1960). [5] Б. Н. Делоне, А. Д. Александров, Математические основы структурного анализа, Л.— М., 1934. [6] H. Minkowski, J. reine u. angew. Math., 129, 220 (1905).