

Член-корреспондент АН СССР В. С. ПУГАЧЕВ

НОРМАЛЬНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Для исследования сложных систем с недетерминированным поведением большое значение имеют упрощенные приближенные методы исследования стохастических систем ^(1, 2). Такие методы можно получить на основе изучения класса нормальных стохастических систем, представляющего собой стохастический аналог класса линейных детерминированных систем.

1. Мы называем стохастическую систему *нормальной*, если при нормальном распределении ее входного сигнала совместное распределение ее входного и выходного сигналов нормально.

Обозначим, как и в ^(1, 2), X — пространство входных сигналов стохастической системы, Y — пространство ее выходных сигналов. Входной и выходной сигналы, рассматриваемые как случайные величины, будем обозначать теми же буквами X, Y , имея в виду, что любой элемент $x \in X$ может служить реализацией входного сигнала, а любой элемент $y \in Y$ — реализацией выходного сигнала. Пространства X и Y будем считать действительными линейными пространствами.

Определим в пространствах X и Y слабые топологии с помощью множеств линейных функционалов L_x и L_y соответственно. Относительно L_x и L_y будем предполагать, что они содержат достаточно много функционалов, для того чтобы из $\lambda x = 0$ при всех $\lambda \in L_x$ следовало $x = 0$ и из $\mu y = 0$ при всех $\mu \in L_y$ следовало $y = 0$. Определим в пространствах L_x и L_y слабые топологии с помощью множеств линейных функционалов вида λx и μy , соответствующих всем возможным $x \in X$ и $y \in Y$. Будем предполагать, что пространства X и Y рефлексивны в том смысле, что любой линейный функционал φ на L_x (соответственно ψ на L_y) может быть представлен в виде $\varphi\lambda = \lambda x$ для всех $\lambda \in L_x$ при некотором $x \in X$ (соответственно в виде $\psi\mu = \mu y$ для всех $\mu \in L_y$ при некотором $y \in Y$). Если теперь определить на прямом произведении пространств $Z = X \times Y$ множество L_z линейных функционалов $\nu z = \lambda x + \mu y$, соответствующих всем $\lambda \in L_x$ и $\mu \in L_y$, и совершенно таким же путем ввести слабые топологии в Z и L_z , то пространство Z тоже будет рефлексивным. При этих условиях любой положительно определенный функционал $g(\lambda)$ на L_x (или L_y , или L_z), непрерывный во введенной нами топологии и удовлетворяющий условию $g(0) = 1$, однозначно определяет вероятностную меру на σ -алгебре, порожденной базой топологии в пространстве X (соответственно Y, Z), и является характеристическим функционалом, соответствующим этой вероятностной мере. Поэтому принятые допущения дают возможность задавать распределения вероятностей в пространствах X, Y и Z с помощью характеристических функционалов.

2. Математическое ожидание $m_x = MX$ случайной величины X в линейном пространстве будем понимать как слабый интеграл

$$m_x = MX = \int x \mu_x(dx),$$

где μ_x — вероятностная мера случайной величины X .

Корреляционный оператор K_x , отображающий L_x в X , определяется формулой

$$K_x \lambda = M(X - m_x)(\overline{\lambda X} - \overline{\lambda m_x}), \quad \lambda \in L_x.$$

Взаимный корреляционный оператор K_{yx} случайных величин X и Y , отображающий L_x в пространство Y реализаций случайной величины Y , определяется формулой

$$K_{yx} \lambda = M(Y - m_y)(\overline{\lambda X} - \overline{\lambda m_x}) = \\ = \int (y - m_y)(\overline{\lambda x} - \overline{\lambda m_x}) \mu_z(dx \times dy), \quad \lambda \in L_x,$$

где μ_z — вероятностная мера составной случайной величины $Z = \{X, Y\}$ с реализациями в прямом произведении пространств $Z = X \times Y$. Случайные величины X и Y коррелированы, если $K_{yx} \lambda \neq 0$ хотя бы для одного $\lambda \in L_x$, и не коррелированы, если $K_{yx} \lambda = 0$ для всех $\lambda \in L_x$.

Оператор K_x положителен, $\lambda K_x \lambda \geq 0$ при всех $\lambda \in L_x$, и симметричен, $\lambda' K_x \lambda = \lambda K_x \lambda'$.

Для любого непрерывного во введенных топологиях линейного оператора T из существования математического ожидания m_x и корреляционного оператора K_x случайной величины X вытекает существование математического ожидания m_y и корреляционного оператора K_y случайной величины $Y = TX$ и формулы

$$m_y = T m_x, \quad K_y = T K_x T^*,$$

где T^* — оператор, сопряженный с T , отображающий L_y в L_x .

3. Распределение случайной величины X в действительном линейном пространстве называется нормальным, если ее характеристический функционал определяется формулой

$$g_x(\lambda) = M e^{i\lambda X} = \exp \{i\lambda m_x - 1/2 \lambda K_x \lambda\}, \quad \lambda \in L_x.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Случайная величина X распределена нормально тогда и только тогда, когда любой конечномерный случайный вектор U с составляющими вида $U_k = \lambda_k X$, $\lambda_k \in L_x$, $k = 1, \dots, n$, распределен нормально.

Теорема 2. Если $Y = b + TX$, где b — произвольный вектор пространства Y , а T — непрерывный (во введенных в п. 1 топологиях) измеримый линейный оператор, то при нормальном распределении величины X случайная величина Y также распределена нормально.

Теорема 3. Если составная случайная величина $Z = \{X, Y\}$ с реализациями в прямом произведении пространств $Z = X \times Y$ распределена нормально, то распределения величин X и Y , рассматриваемых по отдельности, нормальны.

Теорема 4. Если случайная величина $Z = \{X, Y\}$ распределена нормально, то величины X и Y не коррелированы тогда и только тогда, когда они независимы.

Теорема 5. Если случайная величина $Z = \{X, Y\}$ распределена нормально, то условное распределение случайной величины Y (или X) при любом данном значении x (соответственно y) величины X (соответственно Y) регулярно и нормально, причем условное математическое ожидание величины Y (соответственно X) зависит линейно от x (соответственно от y), а ее условный корреляционный оператор не зависит от x (соответственно от y).

Для доказательства теоремы 5 достаточно заметить, что соотношения $x = K_x \lambda$, $y = K_{yx} \lambda$, $\lambda \in L_x$, определяют параметрически некоторый измеримый линейный оператор L , отображающий пространство X в Y , $y = Lx$. непрерывный во введенных в п. 1 топологиях пространств X и Y . Этот

оператор удовлетворяет уравнению

$$LK_x = K_{yx} \quad (LK_x \lambda = K_{yx} \lambda \text{ при любом } \lambda \in L_x). \quad (1)$$

В силу этого уравнения случайные величины $Y - LX$ и X не коррелированы. А так как случайная величина $U = \{X, Y - LX\}$ в произведении пространств $Z = X \times Y$ есть результат непрерывного измеримого линейного преобразования величины $Z = \{X, Y\}$, то она распределена нормально. Поэтому из некоррелированности случайных величин $Y - LX$ и X вытекает их независимость. Отсюда следует представление случайной величины Y в виде

$$Y = LX + Y', \quad (2)$$

где величина Y' распределена нормально и не зависит от X , причем

$$m_{y'} = MY' = m_y - Lm_x, \quad K_{y'} = K_y - LK_x L^*. \quad (3)$$

Из (2) следует, что условное распределение величины Y при данном значении x величины X регулярно и нормально, причем условное математическое ожидание $m_{y|x}$ и условный корреляционный оператор $K_{y|x}$ величины Y определяются формулами

$$m_{y|x} = m_{y'} + Lx, \quad K_{y|x} = K_{y'}. \quad (4)$$

4. Из теоремы 5 следует, что решающая функция нормальной системы представляет собой нормальную меру в пространстве выходных сигналов Y , у которой только один параметр — математическое ожидание — зависит от входного сигнала, причем эта зависимость линейна, а корреляционный оператор не зависит от входного сигнала. Таким образом, любую нормальную систему можно рассматривать как последовательное соединение цепочки, состоящей из параллельно соединенных детерминированной линейной системы с оператором L и генератора шума, вырабатывающего нормально распределенный шум Y' , независимый от входного сигнала, и идеального детерминированного сумматора.

Приведенные теоремы в соединении с формулами для решающих функций соединений стохастических систем, выведенными в ^(1, 2), показывают, что любые соединения нормальных систем представляют собой нормальные системы.

Полученные результаты дают возможность применять для статистического анализа нормальных систем хорошо разработанный в теории автоматического управления аппарат теории линейных систем (см., например ⁽³⁾). При этом необходимо только учитывать, наряду с обычными источниками помех и шумов в детерминированных системах, внутренние шумы в нормальной стохастической системе, создаваемые генераторами шумов, соединенными с детерминированными линейными системами в элементах этой системы. Это неизмеримо упрощает исследование и, в частности, моделирование нормальных стохастических систем по сравнению с исследованием стохастических систем, отличных от нормальных.

5. В связи с изложенным естественно возникает проблема нормализации любой стохастической системы, т. е. замены данной стохастической системы в некотором смысле равноценной нормальной системой, совершенно так же, как в теории автоматического управления нелинейная система заменяется равноценной линейной системой. Решение этой проблемы открывает перспективы применения обычных методов теории автоматического управления для приближенного исследования широкого класса стохастических систем. В частности, решение проблемы нормализации систем массового обслуживания, возможно, откроет новое направление приближенных методов теории массового обслуживания.

Наметим общий путь решения проблемы нормализации стохастической системы. Легко видеть, что для нормализации стохастической системы достаточно аппроксимировать зависимость математического ожидания $m_{y|x}$ ее

выходного сигнала от входного сигнала x приближенной линейной зависимостью вида $a + Lx$, осреднить по возможным реализациям входного сигнала x корреляционный оператор $K_{y|x}$ выходного сигнала и заменить решающую функцию нормальным распределением с параметрами $a + Lx$ и $K_{y'} = (K_{y|x})_{\text{ср}}$.

В силу равенства

$$M(\mu Y - \mu a - \mu LX)^2 = M(\mu Y - \mu m_{y|x})^2 + M(\mu m_{y|x} - \mu a - \mu LX)^2,$$

справедливого для любого функционала $\mu \in L_y$, первая задача сводится к минимизации выражения $M(\mu Y - \mu a - \mu LX)^2$, т. е. к решению относительно оператора L уравнения (1) и вычислению a по формуле $a = m_y - Lm_x$. Вторая задача решается формулой

$$K_{y'} = (K_{y|x})_{\text{ср}} = MK_{y|x} = \int K_{y|x} \mu_x(dx).$$

Математическое ожидание $a + Lx$ и корреляционный оператор $K_{y'}$ полностью определяют нормальное распределение в пространстве выходных сигналов системы при данном входном сигнале x , т. е. решающую функцию нормальной системы, эквивалентной данной стохастической системе в принятом смысле.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
24 VIII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. С. Пугачев, ДАН, 197, № 6, 1288 (1974). ² В. С. Пугачев, Проблемы управления и теории информации, 1, № 1, 65 (1972). ³ Основы автоматического управления, ред. В. С. Пугачев, М., 1968.