Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 3

УДК 517.512 МАТЕМАТИКА

С. З. РАФАЛЬСОН

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ В МЕТРИКЕ L_p

(Представлено академиком В. И. Смирновым 3 V 1972)

1. Теория приближения 2π-периодических функций в метрике L_p тригонометрическими полиномами имеет в основном завершенный характер (по крайней мере, если говорить об оценках наилучших приближений через модули гладкости и об обратных оценках, точных по порядку); аналогичной теории в алгебраическом случае нет.

Пусть $f(x)\in L_p(-1,1)$, $1\leqslant p<\infty$, и $E_n(f)_{L_p}$ — наилучшее приближение $f(x)$ в метрике $L_p(-1,1)$ алгебраическими многочленами степени не выше n.

В 1960 г. М. К. Потапов (5) доказал, что соотношения

$$\|f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-f(x)\|_{L_p(-1,1)}=O(h^\nu),$$
$$E_n(f)_{L_p}=O(n^{-\nu})$$

равносильны при $1/p<\nu<1$. Г. В. Жидков (3) установил необходимое и достаточное условие того, что $E_n(f)_{L_2}=O(n^{-s-\nu})$, $0<\nu<1$, $s\geqslant 0$ целое. Созданный им метод существенно использовал метрику гильбертова пространства.

В настоящем сообщении мы устанавливаем некоторые прямые и обратные теоремы для приближения функций в метрике L_p алгебраическими многочленами.

2. Обозначим

$$f_t(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x\cos t+\sqrt{1-x^2}\sin t\cos\lambda)\,d\lambda,\qquad 0<t<1.$$

Функция $f_t(x)$ введена в работе (3).

Теорема 1. *Справедливо неравенство*

$$\|f-f_t\|_{L_p(-1,1)}\leqslant C(f,p)\cdot t\sum_{k=0}^{[1/t]}E_k(f)_{L_p}.$$

Обозначим $L_{p,(1-x^2)^{ps/2}}$ пространство функций, суммируемых с p-й степенью на $(-1,1)$ с весом $(1-x^2)^{ps/2}$.

Теорема 2. *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{s-1}E_k(f)_{L_p}<\infty$ *($s\geqslant 1$ — натуральное число). Тогда $f^{(s-1)}$ и $(f_t)^{(s-1)}$ абсолютно непрерывны на любом отрезке $[-1+\varepsilon,1-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<1$, $f^{(s)}$, $(f_t)^{(s)}\in L_{p,(1-x^2)^{ps/2}}$ и справедливо неравенство*

$$\|f^{(s)}-(f_t)^{(s)}\|_{L_{p,(1-x^2)^{ps/2}}}\leqslant$$
$$\leqslant C(f,p,s)\sum_{k=[1/4t]+1}^{\infty}k^{s-1}E_k(f)_{L_p}+C(f,p,s)\cdot t^2\sum_{k=0}^{[1/t]}k^{s+1}E_k(f)_{L_p}.$$

Теоремы 1 и 2 доказываются известным методом С. Н. Бернштейна. При этом используются неравенства

$$\| P'_n \|_{L_p(-1,1)} \leqslant C(p)\, n^2 \| P_n \|_{L_p(-1,1)} \text{ (см. [1])},$$

$$\| P_n^{(s)} \|_{L_{p,\,(1-x^2)^{ps/2}}} \leqslant C(p, s)\, n^s \| P_n \|_{L_p(-1,1)} \text{ (см. [4])}.$$

P_n — алгебраический многочлен степени не выше n.

Для доказательства теоремы 1 используется также следующая

Лемма. *Если $f(x)$ абсолютно непрерывна на любом отрезке $[-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<1$, $f(x)\in L_p(-1, 1)$, то*

$$\| f - f_t \|_{L_p(-1,1)} \leqslant C(p)\cdot t \| f' \|_{L_{p,\,(1-x^2)^{p/2}}}.$$

3. Обозначим $E_n(f)_{L_{p,\,\varphi(x)}}$ — наилучшее приближение $f(x)$ алгебраическими многочленами степени не выше n в $L_p(-1, 1)$ с весом $\varphi(x)$.

Теорема 3. *Если $f(x)$ абсолютно непрерывна на любом отрезке $[-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<1$, $f(x)\in L_{p,\,(1-x^2)^{p(s-1)/2}}$, $s\geqslant 1$ целое, $n\geqslant 1$ целое, то*

$$E_n(f)_{L_{p,\,(1-x^2)^{p(s-1)/2}}} \leqslant \frac{C(f, p, s)}{n} E_{n-1}(f')_{L_{p,\,(1-x^2)^{ps/2}}}.$$

4. Предполагая $f^{(s)}$, $(f_t)^{(s)} \in L_{p,\,(1-x^2)^{ps/2}}$, $s\geqslant 0$, введем

$$\omega_{f,s,p}(\delta) = \sup_{0\leqslant t\leqslant\delta} \| f^{(s)} - (f_t)^{(s)} \|_{L_{p,\,(1-x^2)^{ps/2}}},$$

$$\Omega^{(s)}(f;\ \delta) = \sup_{C>0} \frac{\omega_{f,s,p}(C\delta)}{(1+C)^2}.$$

Теорема 4. *Справедливо неравенство*

$$E_n(f)_{L_p} \leqslant \frac{C(f, p, s)}{n^s}\, \Omega^{(s)}\left(f;\ \left[\frac{n}{2}\right]^{-1}\right)_{L_{p,s}}.$$

В равномерном случае теорема, аналогичная теореме 4, доказана в работе [2], но в ней вместо производных $f^{(s)}$ и $(f_t)^{(s)}$ используются $D^s f$ и $(D^s f)_t$, где $D \equiv \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}$ — оператор Лежандра, а D^s — его s-я степень.

Приведем краткое доказательство теоремы 4. Положим

$$\nu_n = \int_0^\pi \left(\frac{\sin{}^1/_2\, nt}{n\sin{}^1/_2\, t}\right)^4 \sin t\, dt, \qquad K_{2n-2}(t) = \frac{1}{\nu_n}\left(\frac{\sin{}^1/_2\, nt}{n\sin{}^1/_2\, t}\right)^4.$$

Легко видеть, что

$$\int_0^\pi K_{2n-2}(t)\sin t\, dt = 1, \tag{1}$$

$$\int_0^\pi K_{2n-2}(t)\sin t\cdot t^\mu\, dt \leqslant \frac{C}{n^\mu}, \qquad 0\leqslant\mu\leqslant 2. \tag{2}$$

Положим также $Q_{2n-2}(f;\ x) = \int_0^\pi f_t(x) K_{2n-2}(t)\sin t\, dt$. Докажем, что $Q_{2n-2}(f;\ x)\in H_{2n-2}$ (H_m — множество всех алгебраических многочленов степени не выше m). Для этого вначале рассмотрим случай, когда $f(x)$ — произвольный алгебраический многочлен, пусть $f(x)\in H_m$. Представим $f(x)$ в виде $f(x) = \sum_{k=0}^m c_k \hat{X}_k(x)$, где $\{\hat{X}_k(x)\}_0^\infty$ — ортонормальная на $[-1, 1]$

система многочленов Лежандра. Тогда, как известно ([3]), $f_t(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k \hat{X}_k(x) P_k(\cos t)$, откуда следует, что $Q_{2n-2}(f;\ x) \in H_{2n-2}$ для $f \in H_m$. Пользуясь ограниченностью Q_{2n-2} как оператора из $L(-1,\ 1)$ в $L_p(-1,\ 1)$ и плотностью множества всех алгебраических многочленов в $L_p(-1,\ 1)$, доказываем, что $Q_{2n-2}(f;\ x) \in H_{2n-2}$ для любой $f(x) \in L_p(-1,\ 1)$. Далее, нетрудно показать, что при $-1 < x < 1$

$$Q_{2n-2}^{(s)}(f;\ x) = \int_0^\pi [f_t(x)]^{(s)} K_{2n-2}(t) \sin t\, dt. \tag{3}$$

Считая $n \geqslant (s+2)/2$, применяя обобщенное неравенство Минковского и принимая во внимание (1), (2), (3), получим

$$E_{2n-2-s}(f^{(s)})_{L_{p,\,(1-x^2)^{ps/2}}} \leqslant \| f^{(s)}(x) - Q_{2n-2}^{(s)}(f;\ x) \|_{L_{p,\,(1-x^2)^{ps/2}}} =$$

$$= \left\{ \int_{-1}^{1} \left| \int_0^\pi [f^{(s)}(x) - (f_t(x))^{(s)}]\, K_{2n-2}(t) \sin t\, dt \right|^p \cdot (1-x^2)^{ps/2}\, dx \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\pi K_{2n-2}(t) \sin t\, dt \left\{ \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{ps/2} \,|\, f^{(s)}(x) - [f_t(x)]^{(s)} \,|^p\, dx \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\pi K_{2n-2}(t) \sin t \cdot \omega_{f,\,s,\,p}(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\pi K_{2n-2}(t) \sin t \cdot \frac{\omega_{f,\,s,\,p}\left(\frac{1}{n} \cdot tn\right)}{(1+tn)^2} (1+tn)^2\, dt \leqslant C\Omega^{(s)}\left(f;\ \frac{1}{n}\right)_{L_{p,\,s}}.$$

Применяя s раз теорему 3, получим, что

$$E_{2n-2}(f)_{L_p} \leqslant \frac{C(f,\,p,\,s)}{n^s}\ \Omega^{(s)}\left(f;\ \frac{1}{n}\right)_{L_{p,\,s}},$$

откуда

$$E_n(f)_{L_p} \leqslant E_{2[n/2]-2}(f)_{L_p} \leqslant \frac{C(f,\,p,\,s)}{n^s}\ \Omega^{(s)}\left(f;\ \left[\frac{n}{2}\right]^{-1}\right)_{L_{p,\,s}}.$$

Следствие теорем 1, 2 и 4. *Для того чтобы* $E_n(f)_{L_p} = O(n^{-s-\alpha})$, $s \geqslant 0$ *целое*, $0 < \alpha < 1$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\| f^{(s)} - (f_t)^{(s)} \|_{L_{p,\,(1-x^2)^{ps/2}}} = O(t^\alpha).$$

В случае $p = 2$ следствие доказано в работе ([3]). Отметим, что в случае $p \neq 2$ потребовались иные технические средства.

Ленинградский финансово-экономический институт
им. Н. А. Вознесенского

Поступило
11 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. К. Бари, Изв. АН СССР, сер. матем., 18 (1954). [2] А. С. Джафаров, ДАН, 187, № 4 (1969). [3] Г. В. Жидков, ДАН, 169, № 5 (1966). [4] Г. К. Лебедь, ДАН, 117, № 4 (1957). [5] М. К. Потапов, Вестн. Московск. унив., № 4 (1960).