Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 5

УДК 519.4 : 513.88

МАТЕМАТИКА

Г. М. ФЕЛЬДМАН

ОБ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

(Представлено академиком В. И. Смирновым 30 III 1972)

В работах Лорха ([1]), Ю. И. Любича ([2–4]), Якобса ([5]), де Лю-Гликсберга ([6]) спектральные свойства операторов в банаховом пространстве изучались методами теории почти-периодических функций. Настоящая заметка в известном смысле является продолжением этих исследований. Существенно новым, по сравнению с указанными выше работами, у нас является применение гармонического анализа в духе Берлинга к изучению представлений групп (ср. ([7])). Отметим, что полученные нами результаты связаны с некоторыми результатами А. С. Маркуса, Л. Н. Никольской и Н. К. Никольского ([8]).

Пусть G — локально компактная сепарабельная * абелева группа, G^* — группа ее унитарных характеров, T — сильно непрерывное представление группы G ограниченными линейными операторами в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$. Обозначим через $\sigma(T)$ спектр представления T в смысле Ю. И. Любича ([9]), т. е. множество таких характеров $\chi \in G^*$, для каждого из которых существует нормированная последовательность векторов $\{x_n\} \subset \mathfrak{B}$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}(T_g x_n - \chi(g) x_n) = 0$$

для всех $g \in G$. В ([9]) доказано, что спектр представления не пуст и замкнут в топологии группы G^*. Характер χ будем называть собственным для представления T, если существует вектор $x \neq 0$ (собственный вектор представления), на котором $T_g x = \chi(g)x$. Множество собственных характеров назовем дискретным спектром представления и обозначим через $\sigma_d(T)$ (очевидно, $\sigma_d(T) \subset \sigma(T)$).

Пусть T — изометрическое представление **, т. е. $\|T_g\| = 1$ для всех $g \in G$. Свяжем с представлением T семейство скалярных функций $\{\varphi(T_g x)\}$, $x \in \mathfrak{B}$, $\varphi \in \mathfrak{B}^*$, на группе. Гармонический анализ этого семейства позволяет получить достаточно полную информацию о представлении. А именно, обозначим через $\sigma_{\varphi,x}$ спектр Берлинга (см. ([10])) функции $\varphi(T_g x)$. Оказывается, ([7]) что

$$\sigma(T) = \overline{\bigcup_{\varphi,\, x} \sigma_{\varphi,\, x}}, \tag{1}$$

где черта означает замыкание в группе G^*. В следующей теореме дается достаточное условие непустоты дискретного спектра $\sigma_d(T)$ представления T.

---

* Требование сепарабельности по существу излишне в вопросах, рассматриваемых в настоящей заметке, но отказ от него может потребовать пересмотра основных определений.

** Если представление T равномерно ограничено, т. е. $\|T_g\| \leqslant M$ для всех $g \in G$, то в пространстве $\mathfrak{B}$ можно ввести новую норму $\|x\|_1 = \sup \|T_g x\|$, эквивалентную данной. Очевидно, что $\|T_g\|_1 = 1$. Это показывает, что изучение равномерно ограниченных представлений сводится к изучению изометрических представлений. Предположение об изометричности мы сохраняем на протяжении всей заметки.

Теорема 1. *Пусть χ_0 — изолированная точка спектра $\sigma(T)$. Тогда χ_0 — собственный характер.*

Эта теорема, благодаря (1), эквивалентна следующему хорошо известному факту гармонического анализа: если ограниченная функция $f(g)$ на локально компактной абелевой группе имеет спектр Берлинга, состоящий из единственной точки χ_0, то $f(g) = c\chi_0(g)$, $c = \mathrm{const}$.

Теорема 2. *Собственные векторы x и y представления T, отвечающие различным собственным характерам, взаимно ортогональны в банаховом смысле, т. е. для всех комплексных α*

$$\|x + \alpha y\| \geqslant \|x\|, \quad \|y + \alpha x\| \geqslant \|y\|.$$

Следствие. *Дискретный спектр представления T в сепарабельном пространстве $\mathfrak{B}$ не более чем счетен.*

Все следующие результаты относятся к представлению с полной системой собственных векторов. Как известно [3], такие представления тесно связаны с почти-периодическими функциями.

Теорема 3. *Для того чтобы система собственных векторов представления T была полна, необходимо, а в слабо полном пространстве и достаточно, чтобы все функции $\varphi(T_g x)$ были почти-периодическими на группе.*

Для изучения представлений с полной системой собственных векторов нам будет удобно использовать введенное Мааком [11] понятие почти-периодического вектора.

Вектор $x \in \mathfrak{B}$ называется почти-периодическим, если траектория $T_g x$, $g \in G$, предкомпактна в $\mathfrak{B}$.

Очевидно, что собственные векторы представления являются почти-периодическими. Очевидно также, что множество почти-периодических векторов является замкнутым подпространством в $\mathfrak{B}$. Это подпространство совпадает с $\mathfrak{B}$, если система собственных векторов полна. Как показал Маак [11], для любого почти-периодического вектора $x \in \mathfrak{B}$ и любого характера χ существует среднее по группе

$$P_\chi x = \mathrm{M}\{\overline{\chi(g)}\, T_g x\}.$$

Оказывается, что линейные операторы P_χ обладают следующими свойствами: 1) $\|P_\chi\| = 1$, 2) $P_\chi^2 = P_\chi$, т. е. P_χ — проектор, 3) $T_g P_\chi = P_\chi T_g$, 4) если $P_\chi \neq 0$, то P_χ проектирует на собственное подпространство, соответствующее характеру χ, 5) если $\chi_1 \neq \chi_2$, то $P_{\chi_1} \cdot P_{\chi_2} = 0$. Последнее свойство усиливает теорему 2. Сопоставим каждому вектору x формальный ряд Фурье

$$x \sim \sum_\chi P_\chi x \tag{2}$$

(члены этого ряда, для которых χ не является собственным характером, равны нулю).

Теорема 4. *Если все члены ряда Фурье вектора x равны нулю, то $x = 0$.*

Следствие. *Если ряд Фурье вектора x слабо сходится, то его сумма равна x.*

Для представлений с полной системой собственных векторов имеет место спектральный синтез.

Теорема 5. *Если система собственных векторов представления T полна, то она полна в каждом инвариантном подпространстве.*

Теорема 1 показывает, что существование собственных векторов представления может следовать из топологических свойств спектра. Следующая теорема дает весьма общие достаточные условия полноты системы собственных векторов представления в терминах топологии спектра.

Теорема 6. *Пусть пространство $\mathfrak{B}$ представления T слабо полно. Если спектр представления не содержит непустых совершенных подмножеств, то система собственных векторов полна.*

Доказательство этой теоремы существенно использует равенство (1) и один результат Люмиса ([12]), дающий условие почти-периодичности функции на группе в терминах ее спектра Берлинга. Теорема 6 точна в следующем смысле. Если K — несчетное замкнутое подмножество группы характеров G^*, то существует такое унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве, спектр которого совпадает с K, а система собственных векторов не полна.

Укажем на одно применение теоремы 6 к линейным дифференциальным уравнениям в банаховом пространстве. Пусть A — линейный оператор, определенный на плотном линейном многообразии D_A в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$. Предположим, что A замкнут и задача Коши

$$\frac{1}{i}\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad x(0) = x, \tag{3}$$

при любом $x \in D_A$ имеет единственное решение.

Теорема 7 (ср. ([2], [13])). *Пусть пространство $\mathfrak{B}$ слабо полно и спектр оператора A счетен.*

Тогда, если все решения задачи Коши (3) *ограничены при $-\infty < t < \infty$, то они являются почти-периодическими функциями.*

Формальный ряд Фурье (2), разумеется, не обязан сходиться. Однако в некоторых случаях он сходится и даже сходится безусловно. Это связано с арифметической природой спектра представления $\sigma(T)$. Используя известную теорему Хартмана и Рыль-Нардзевского об абсолютной сходимости ряда Фурье почти-периодической функции, можно показать, что если дискретный спектр представления $\sigma_d(T)$ является независимым множеством над кольцом целых чисел *, то ряд (2) сходится безусловно. Известно, что независимое над кольцом целых чисел множество характеров является множеством Хелсона, т. е. таким компактным подмножеством группы характеров G^*, что любая непрерывная функция на нем представляет собой сужение преобразования Фурье некоторой функции из $L^1(G)$ (см. ([14])).

Теорема 8. *Если спектр представления является счетным множеством Хелсона и система собственных векторов представления полна, то собственные подпространства образуют безусловный базис в $\mathfrak{B}$.*

Теорема 8 точна в том смысле, что если компактное счетное множество E не является множеством Хелсона, то существует представление группы G в некотором банаховом пространстве такое, что его спектр совпадает с E, система собственных векторов полна, а собственные подпространства не образуют безусловного базиса.

Автор выражает благодарность Ю. И. Любичу за полезное обсуждение настоящей работы.

Физико-технический институт
низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
12 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. R. Lorch, Trans. Am. Math. Soc., 49, 18 (1941). [2] Ю. И. Любич, ДАН, 132, № 3, 518 (1960). [3] Ю. И. Любич, УМН, 18, № 1, 165 (1963). [4] Ю. И. Любич, УМН, 20, № 5, 221 (1965). [5] K. Jakobs, Math. Zs., 64, № 3, 298 (1956). [6] K. de Leeuw, I. Glicksberg, Acta Math., 105, № 1—2, 63 (1961). [7] Г. М. Фельдман, Функциональный анализ и его приложения, 6, в. 1, 89 (1972). [8] А. С. Маркус, Л. Н. Никольская, Н. К. Никольский, Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, 22, 65 (1971). [9] Ю. И. Любич, ДАН, 200, № 4, 777 (1971). [10] Н. Данфорд, Д. Т. Шварц, Линейные операторы, М., 1966. [11] W. Maak, Festperiodische Funktion, Berlin, 1950. [12] L. H. Loomis, Ann. Math., 72, № 2, 362 (1960). [13] Ф. А. Шолохович, Научн. докл. высшей школы, Физ.-матем. науки, № 2, 100 (1958). [14] J. P. Kahane, Proc. Intern. Congr. Math., Stockholm, 1962, Sweden, 1963, p. 114.

* Т. е. из $\chi_1^{n_1}(g) \ldots \chi_k^{n_k}(g) \equiv 1$ следует, что $n_1 = \ldots n_k = 0$.