Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 3

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

Ю. М. РЫЖОВ

О СТОХАСТИЧЕСКИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССАХ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 3 V 1972)

В заметке изучается класс стационарных гауссовских процессов $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{M}\xi(t) = 0$, для которых существует такой стационарный процесс $\eta(t)$, стационарно связанный с $\xi(t)$, что

$$\xi(t) - \xi(0) = \int_0^t \eta(s)\,ds + \sigma w(t), \tag{1}$$

где $w(t)$ — процесс броуновского движения, $\sigma > 0$ — некоторая неслучайная постоянная. Нетрудно показать, что для стационарного гауссовского процесса, имеющего стохастический дифференциал, последний необходимо имеет вид (1). Кроме того, в силу известной альтернативы для стационарных гауссовских процессов, можем далее все процессы считать непрерывными с вероятностью 1.

Так же, как доказывается известная теорема Дуба ([1], § 1, теорема 1), можно показать, что справедлива следующая

Теорема 1. *Для того чтобы гауссовский стационарный процесс имел стохастический дифференциал*

$$d\xi(t) = \eta(t)\,dt + \sigma\,dw(t),$$

необходимо и достаточно, чтобы с вероятностью 1 *выполнялось*

$$\mathbf{M}\{\xi(t+h) - \xi(t) / \mathfrak{F}_t\} = \eta(t)h + o(h),$$
$$\mathbf{M}\{[\xi(t+h) - \xi(t)]^2 / \mathfrak{F}_t\} = \sigma^2 h + o(h),$$

где $\mathfrak{F}_t$ — некоторое монотонное семейство σ-алгебр, величины $\eta(t)$ измеримы относительно $\mathfrak{F}_t$ при каждом t, а символ $o(\cdot)$ понимается в смысле среднеквадратической сходимости.

При некоторых дополнительных ограничениях можно получить условия стохастической дифференцируемости в терминах спектра процесса $\xi(t)$. Обозначим через $f_\eta(\lambda)$ плотность абсолютно непрерывной компоненты спектральной функции $F_\eta(\lambda)$ процесса $\eta(t)$. Пусть

$$\eta(t) = \int e^{i\lambda t}\,dZ_\eta(\lambda), \quad w(t) = \int \frac{e^{i\lambda t} - 1}{i\lambda}\,dZ_w(\lambda),$$

где $Z_\eta(\Delta)$ и $Z_w(\Delta)$ — ортогональные гауссовские комплекснозначные меры, причем

$$\mathbf{M}Z_\eta(\Delta_1)\overline{Z_\eta(\Delta_2)} = \int_{\Delta_1 \cap \Delta_2} dF_\eta(\lambda),$$
$$\mathbf{M}Z_w(\Delta_1)\overline{Z_w(\Delta_2)} = |\Delta_1 \cap \Delta_2|,$$
$$\mathbf{M}Z_\eta(\Delta_1)Z_w(\Delta_2) = \int_{\Delta_1 \cap \Delta_2} dF_{\eta w}(\lambda),$$

($|\Delta|$ — мера Лебега). Тогда $F_{\eta w}(\Delta)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и будем обозначать

$$F_{\eta w}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda} f_{\eta w}(i\mu)\,d\mu.$$

Определение. Будем говорить, что процесс $\xi(t)$ имеет регулярный стохастический дифференциал, если при всех λ выполняется $f_\eta(\lambda)-|f_{\eta w}(\lambda)|^2=0$.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Для того чтобы гауссовский стационарный процесс $\xi(t)$ со спектральной функцией $F(\lambda)$ имел регулярный стохастический дифференциал, необходимо и достаточно, чтобы плотность $f(\lambda)$ абсолютно непрерывной компоненты $F^c(\lambda)$ функции $F(\lambda)$ имела вид $f(\lambda)=|h(i\lambda)|^2$ и при этом*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(i\lambda)|^2\,d\lambda<\infty,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}|i\lambda h(i\lambda)-\sigma|^2\,d\lambda<\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|h(i\lambda)|^2}{1+\lambda^2}\,d\lambda+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|i\lambda h(i\lambda)-\sigma|^2}{1+\lambda^2}\,d\lambda>-\infty,$$

а ступенчатая компонента $F^\alpha(\lambda)$ удовлетворяла условию

$$\sum_k \lambda_k^2\,[F^d(\lambda_k+0)-F^d(\lambda_k-0)]<\infty,$$

где λ_k — точки скачков функции $F^d(\lambda)$. Стохастический дифференциал имеет вид

$$d\xi(t)=\eta(t)\,dt+\sigma\,dw(t),$$

где

$$F_\eta(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}|i\mu h(i\mu)-\sigma|^2\,d\mu+\int_{-\infty}^{\lambda}dF^d(\mu),$$

$$f_{\eta w}(\lambda)=i\lambda h(i\lambda)-\sigma.$$

Наконец, используя теорему 1, можно показать, что имеет место

Теорема 3. *Для того чтобы стационарный гауссовский процесс $\xi(t)$ имел стохастический дифференциал, необходимо и достаточно, чтобы его корреляционная функция $R(\tau)$ была дважды непрерывно дифференцируема при $\tau>0$ и $R'(+0)\neq 0$, $R''(+0)<\infty$. При этом $R'(+0)=-\sigma^2/2$.*

Из теоремы 3 вытекает

Теорема 4. *Пусть стационарные гауссовские процессы $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $t\in[0,T]$, имеют нулевые средние и корреляционные функции $R_1(\tau)$, $R_2(\tau)$, которые дважды непрерывно дифференцируемы при $\tau>0$. Для того чтобы меры в функциональном пространстве, отвечающие процессам $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, были ортогональными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $R_1'(+0)\neq R_2'(+0)$.*

Достаточность этого условия легко получить из теоремы Бакстера ([2]), однако его необходимость была известна лишь в случае, когда процессы $\xi_i(t)$, $i=1,2$, имеют дробно-рациональные спектральные плотности.

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
5 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Гихман, А. В. Скороход, Стохастические дифференциальные уравнения, Киев, 1968. [2] G. Baxter, Proc. Am. Math. Soc., 7, № 3, 15 (1956).