Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 5

УДК 519.281

МАТЕМАТИКА

В. Л. ЭЙДЛИН

О ЗАДАНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛИНОМА ЕГО МОМЕНТАМИ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 8 X 1971)

I. Пусть μ_n — мера в R^n с плотностью $\pi^{\frac{1}{2}n}\exp\{-|x|^2\}$ относительно меры Лебега в R^n, P, Q — вещественные полиномы в R^n с равными относительно μ_n моментами, т. е.

$$\int P^s d\mu_n = \int Q^s d\mu_n, \quad s = 1, 2, 3, \ldots$$

Спрашивается, совпадают ли распределения P и Q относительно μ_n; иными словами, верно ли, что $\mu_n(P < t) = \mu_n(Q < t)$ при всех $t \in R^1$? (См. по поводу постановки этого вопроса [1, 2].)

Для полиномов степеней не выше двух положительный ответ на этот вопрос следует из критерия Карлемана однозначной разрешимости классической проблемы моментов [3]; в случае произвольных степеней критерий этот неприменим и, более того, классическая проблема моментов

$$\int\limits_{R^1} t^s d\lambda(t) = \alpha_s, \quad \alpha_s = \int\limits_{R^n} P^s d\mu_n, \quad s = 0, 1, 2, \ldots,$$

имеет заведомо больше одного решения [3].

В этой заметке формулируются теоремы, влекущие положительный ответ на поставленный вопрос.

II. Обозначения. (X, ν) — пространство с нормированной мерой, x — точка из X, r — точка луча $R^+ = [0, +\infty)$; μ — мера на R^+ с плотностью $Cr^l \exp\{-r^q\}$. Здесь $C > 0$ — нормирующая постоянная, $l \geqslant 0$, $q > 0$. (Y, θ) будет обозначать пространство с мерой $(X \times R^+, \nu \times \mu)$.

Определение 1. Пусть $\{f_i\}_{i=0}^k$ — набор измеримых функций на X. Функцию $F(x, r) = \sum\limits_0^k f_i(x) r^i$, заданную на $Y = X \times R^+$, назовем псевдополиномом. Функции f_i будем называть коэффициентами псевдополинома F.

III. Теорема 1. *Пусть F, G — действительные псевдополиномы с ограниченными коэффициентами и* $\operatorname{vrai\,inf}\limits_{x\in X}|f_k(x)|$, $\operatorname{vrai\,inf}\limits_{x\in X}|g_k(x)| > 0$. *(Здесь f_k, g_k — старшие коэффициенты F и G.)*

Если $\int\limits_Y F^s d\theta = \int\limits_Y G^s d\theta$ при $s = 1, 2, 3, \ldots$, то F и G равнораспределены по мере θ.

Примечание 1. Если $F, G \geqslant 0$, то требование $\int F^s = \int G^s$ при натуральных s в условии теоремы 1 можно заменить требованием $\int F^{s_i} = \int G^{s_i}$, где $\{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ — любая последовательность комплексных чисел $\operatorname{Re} s_i \geqslant 0$, имеющая положительную плотность при порядке, равном 1 (см. определения в [4]).

Примечание 2. Заключение теоремы 1 можно усилить. *Функции* $\sum\limits_{i=0}^k r^i f_i(x)$ *и* $\sum\limits_{i=0}^k r^i g_i(x)$ *равнораспределены по мере ν на X при любом фиксированном $r \geqslant 0$.*

Теорема 2. *Пусть* $F_1,\ldots,F_m$, $G_1,\ldots,G_m$ — *действительные псевдополиномы с ограниченными коэффициентами. Пусть, кроме того, старшие коэффициенты этих псевдополиномов ограничены от нуля по абсолютной величине.*

Если $\int\limits_Y F_1^{s_1}\ldots F_m^{s_m}d\theta = \int\limits_Y G_1^{s_1}\ldots G_m^{s_m}d\theta$ *при всех неотрицательных целочисленных наборах* $s=(s_1,\ldots,s_m)$, *то распределения вектор-статистик* $F=(F_1,\ldots,F_m)$ *и* $G=(G_1,\ldots,G_m)$ *по мере* θ *совпадают.*

Здесь, как и в примечании 1, можно было бы рассматривать не только целочисленные наборы $s=(s_1,\ldots,s_m)$, если считать псевдополиномы F_i и G_i, $i=1, 2,\ldots, m$, неотрицательными.

Будем далее считать X вещественным алгебраическим многообразием, а ν — аналитической мерой на X. Коэффициенты псевдополиномов будем считать действительными функциями, регулярными (в смысле алгебраической геометрии, см. определения в ([9])) на X.

Определение 2. Псевдополином будем называть **алгебраическим**, если для его коэффициентов выполнены перечисленные выше условия.

Теорема 3. *Пусть* $F_1,\ldots,F_m$; $G_1,\ldots,G_m$ — *действительные алгебраические псевдополиномы с ограниченными коэффициентами.*

Если $\int\limits_Y F_1^{s_1}\ldots F_m^{s_m}\,d\theta \neq \int\limits_Y G_1^{s_1}\ldots G_m^{s_m}\,d\theta$ *для всех целочисленных неотрицательных наборов* $s=(s_1,\ldots,s_m)$, *то распределения вектор-статистик* $F=(F_1,\ldots,F_m)$ *и* $G=(G_1,\ldots,G_m)$ *по мере* θ *совпадают.*

Примечание 3. Ограничиваясь для простоты случаем $m=1$, можно утверждать более сильный факт. Функции $\sum\limits_0^k r^i f_i(x)$ и $\sum\limits_0^k r^i g_i(x)$ равнораспределены на X по мере ν при любом фиксированном $r\geqslant 0$.

Следствие 1. *Если* P, Q — *два полинома в* R^n, *имеющие вещественные коэффициенты, и* $\int P^s d\mu_n = \int Q^s d\mu_n$ *при* $s=1, 2, 3,\ldots$, *то* $\mu_n(P<t)=\mu_n(Q<t)$ $\forall t\in R^1$ *и, более того,* P *и* Q *равнораспределены на каждой* $(n-1)$*-мерной сфере в* R^n *с центром в начале координат по* $(n-1)$*-мерной мере Лебега.*

Теорема 4. *Пусть* F, G — *действительные алгебраические псевдополиномы с ограниченными коэффициентами. Если* $\int\limits_Y F^sG^l d\theta = \int\limits_Y F^s d\theta \int\limits_Y G^l d\theta$ *для всех* s, $l=0, 1, 2,\ldots$, *то* $\theta(F<a,\ G<b)=\theta(F<a)\cdot\theta(G<b)$ *для всех* $(a, b)\in R^2$, *т. е. полная декоррелированность* F *и* G *влечет их независимость.*

Следствие 2. *Пусть* P, Q — *вещественные полиномы в* R^n.

Если $\int\limits_{R^n} P^sQ^l d\mu_n = \int\limits_{R^n} P^s d\mu_n \int\limits_{R^n} Q^l d\mu_n$ *для всех* s, $l=0, 1, 2,\ldots$, *то* P *и* Q *независимы по мере* μ_n.

IV. Замечания. Следствие 1 может служить обобщением теоремы Кочрэна (см. ([10])), относящейся к случаю квадратичных полиномов, на случай полиномов произвольных степеней. Следствие 2 существенно при исследовании так называемой проблемы расщепления декоррелированных полиномов (см. по этому поводу ([5], [6])).

Следует заметить, что в теоремах 1—4 можно рассматривать и псевдополиномы с комплексными коэффициентами. Правда, при этом необходимо, чтобы старшие коэффициенты псевдополиномов были действительными функциями. Это требование существенно, как показывает пример полиномов в R^2, имеющих комплексные коэффициенты, $f(x, y) = x+iy$ и $g(x, y)=(x+iy)^2$. Очевидно, все моменты f и g по мере

μ_2 равны нулю и, значит, равны между собой; f и g, однако, не являются равнораспределенными по мере μ_2 ни в каком смысле.

При доказательстве теорем 3, 4 существенно используются результаты, содержащиеся в ([8]). В частности, необходимым (в доказательстве автора) является использование теоремы Хиронака об особенностях ([9]). Автору неизвестно, верны ли теоремы 3, 4 без требования алгебраичности псевдополиномов. Весьма возможно, кроме того, что теоремы, аналогичные 1—4, верны и для целых функций порядка, меньшего 1.

Имеется другой подход к рассмотренным задачам. Нетрудно видеть, что для двух измеримых функций φ и ψ, заданных на R^1 и таких, что $s(\varphi-\psi)=m<+\infty$, равенства

$$\int\limits_{R_1} t^i\varphi\,dt=\int\limits_{R^1} t^i\psi\,dt,\quad i=0,1,2,\ldots,m,$$

влекут за собой равенство $\varphi=\psi$ почти всюду. Здесь $s(h)$ обозначает число (существенных) перемен знака функции h, заданной на R^1.

Возникает вопрос: верно ли, что $s(\mu_n(P<t)-\mu_n(Q<t))<+\infty$? Здесь P, Q — полиномы в R^n.

Относительно функции распределения полинома P $\mu_n(P<t)$ известно, что она формально удовлетворяет некоторому однородному линейному дифференциальному уравнению с полиномиальными коэффициентами ([7]). Можно показать, что она кусочно-аналитична и число «изломов» ее на оси не превосходит k^n, где k — степень полинома.

Ответ на поставленный вопрос положителен в простых частных случаях (например, в случае $n=1$ или в случае однородных P и Q). Ответ в общем случае автору неизвестен.

Гипотеза. $s(\mu_n(P<t)-\mu_n(Q<t))<(Am)^{Bn}$. Здесь P, Q — полиномы степеней не выше чем m, а n — число переменных. Постоянные A и B не зависят от P и Q.

Автор выражает признательность акад. Ю. В. Линнику за постановку задачи и постоянное внимание, М. Л. Громову и А. А. Зингеру за полезные обсуждения.

Ленинградский гидрометеорологический институт

Поступило
1 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Yu. V. Linnik, Polynomial Statistics and Polynomial Ideals, Golden Jubilee Commemoration Volume, Part 1, Calcutta Mat. Soc., 1958. [2] Ю. В. Линник, Статистические задачи с мешающими параметрами, «Наука», 1966. [3] Н. И. Ахиезер, Классическая проблема моментов, М., 1961. [4] Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956. [5] А. М. Каган, Ю. В. Линник, С. Р. Рао, Характеризационные задачи математической статистики, «Наука», 1971. [6] Yu. V. Linnik, Statistical Seminar Notes, Indian Statistical Inst. Calcutta, 1954. [7] А. А. Зингер, Тр. Матем. инст. АН СССР им. В. А. Стеклова, 79 (1965). [8] И. Н. Бернштейн, С. И. Гельфанд, Функциональный анализ, 3, в. 1 (1969). [9] Х. Хиронака, Сборн. пер. Математика, 9, № 6 (1965). [10] С. Уилкс, Математическая статистика, «Наука», 1967.