Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 5

УДК 517.544.2

МАТЕМАТИКА

А. ЯНУШАУСКАС

ОБ ОДНОЙ РЕДУКЦИИ ЗАДАЧИ С НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 12 X 1971)

Пусть в области D трехмерного эвклидова пространства заданы аналитические функции $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$, и пусть u — регулярная в D гармоническая функция. Рассмотрим задачу о наклонной производной с граничным условием

$$au_x + bu_y + cu_z = f, \tag{1}$$

заданным на границе Γ области D.

Для функции $v = au_x + bu_y + cu_z$ имеем

$$\Delta v + \lambda_1 v_x + \lambda_2 v_y + \lambda_3 v_z = Pu_{xy} + Qu_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu_z, \tag{2}$$

где

$$\lambda_1 = 2[c(a_z + c_x) - a(a_x - c_z)](a^2 + c^2)^{-1},$$
$$\lambda_3 = 2[c(a_x - c_z) - a(a_z + c_x)](a^2 + b^2)^{-1},$$
$$\lambda_2 = -[\lambda_3 b + 2(b_z + c_y)]c^{-1}; \quad P = \lambda_1 b + \lambda_2 a + 2(a_y + b_x),$$
$$Q = \lambda_2 b - \lambda_3 c + 2(b_y - a_x),$$
$$A = L(a), \quad B = L(b), \quad C = L(c),$$
$$L = \Delta + \lambda_1 \partial/\partial x + \lambda_2 \partial/\partial y + \lambda_3 \partial/\partial z.$$

Будем предполагать, что $c \neq 0$ всюду в D. При выполнении этого условия все коэффициенты соотношения (2) аналитичны в D. Из (2) получаем [1]

$$v = g + \int_D G(X, X_1)\, l(u)\, d\omega + \int_D G(X, X_1)\left[P \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_1} + Q \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}\right] d\omega, \tag{3}$$

где G — функция Грина задачи Дирихле для области D уравнения $L(v) = 0$, g — решение этого уравнения, совпадающее с f на Γ, $l(u) = Au_x + Bu_y + Cu_z$, $X = (x, y, z)$, $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$.

Таким образом, каждое решение задачи (1) удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$au_x + bu_y + cu_z = g + \int_D G(X, X_1)\, l(u)\, d\omega + \int_D G(X, X_1)\left[P \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_1} + Q \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}\right] d\omega, \tag{4}$$

а сама задача (1) эквивалентна отысканию гармонических решений уравнения (4).

Наряду с функцией v рассмотрим функцию $w = u_y$. Уравнение (4) эквивалентно системе

$$au_x + bu_y + cu_z = g + \int_D G(X, X_1)\, l(u)\, d\omega +$$

$$+\int_D G(X, X_1)\left[P\frac{\partial w}{\partial x_1} + Q\frac{\partial w}{\partial y_1}\right]d\omega, \tag{5}$$

$$u_y = w.$$

Выполнив интегрирование по частям, получим

$$au_x + bu_y + cu_z = g + \int_D L(X, X_1)\, u(X_1)\, d\omega + \int_D K(X, X_1)\, w(X_1)\, d\omega, \tag{6}$$

$$u_y = w.$$

$$K(X, X_1) = \frac{\partial}{\partial x_1}[P(X_1)G(X, X_1)] + \frac{\partial}{\partial y_1}[Q(X_1)G(X, X_1)],$$

$$L(X, X_1) = \frac{\partial}{\partial x_1}[A(X_1)G(X, X_1)] + \frac{\partial}{\partial y_1}[B(X_1)G(X, X_1)] + $$

$$+ \frac{\partial}{\partial z_1}[C(X_1)G(X, X_1)].$$

Очевидно, что ядра K и L являются фредгольмовыми ядрами.

Для упрощения дальнейшего исследования системы (6) наложим ряд ограничений на область D.

Определение. Пусть в области $D \subset R^3$ с гладкой границей Γ задано векторное поле $P(a, b, c)$. Область D будем называть **сильно выпуклой относительно** P, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) каждая траектория поля P, пересекающаяся с D, пересекает D по связной дуге, гомеоморфной отрезку прямой;

2) поле P выходит в касательную к Γ плоскость по гладкой связной замкнутой кривой L, через которую можно провести аналитическую в D поверхность M такую, что M является гладким двумерным многообразием с краем L, а каждая траектория поля P, пересекающаяся с D, пересекает M только в одной точке, причем векторы поля P на M составляют острый угол с нормалью к M.

Будем предполагать, что область D сильно выпукла как относительно поля $P(a, b, c)$, так и относительно векторного поля $Q(0, 1, 0)$.

В силу сделанных предположений, существуют два независимых голоморфных в D интеграла ξ и η уравнения

$$a\psi_x + b\psi_y + c\psi_z = 0$$

и обращающееся в нуль на M голоморфное в D решение ζ уравнения

$$a\zeta_x + b\zeta_y + c\zeta_z = 1.$$

Якобиан функций ξ, η и ζ отличен от нуля всюду в D, и эти функции могут служить криволинейными координатами в D ([2], [3]).

Положим

$$h(X) = \int_0^\zeta g_1(\xi, \eta, t)\, dt, \quad M(X, X_1) = \int_0^\zeta L_1(\xi, \eta, t; X_1)\, dt,$$

$$N_0(X, X_1) = \int_0^\zeta K_1(\xi, \eta, t; X_1)\, dt,$$

где g_1, L_1 и K_1 получаются из g, L и K заменой переменных x, y и z на ξ, η и ζ.

Из первого уравнения системы (6) имеем

$$u = h(X) + \chi(\xi, \eta) + \int_D M(X, X_1)\, u(X_1)\, d\omega + \int_D N_0(X, X_1)\, w(X_1)\, d\omega, \tag{7}$$

где χ — произвольная аналитическая в области D функция переменных ξ и η. Из (7) находим ([4])

$$u = \chi(\xi, \eta) + \int_D R(X, X_1)\chi(\xi_1, \eta_1)\,d\omega + H(X) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} C_i\psi_i(X) + \int_D N_1(X, X_1)\,w(X_1)\,d\omega, \tag{8}$$

$$\int_D \{\nu_i(X)\,[h(X) + \chi(\xi, \eta)] + \mu_i(X)\,w(X)\}\,d\omega = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{9}$$

где R — обобщенная резольвента ядра L, ψ_i, $i = 1, \ldots, m$, — линейно независимые решения уравнения

$$u(X) = \int_D M(X, X_1)\,u(X_1)\,d\omega, \tag{10}$$

ν_i, $i = 1, \ldots, m$,— решения сопряженного для (10) уравнения, C_i, $i = 1, \ldots, m$,— произвольные постоянные;

$$H(X) = h(X) + \int_D R(X, X_1)\,h(X_1)\,d\omega,$$

$$N_1(X, X_1) = N_0(X, X_1) + \int_D R(X, X_2)\,N_0(X_2, X_1)\,d\omega,$$

$$\mu_i(X) = \int_D \nu_i(X_1)\,N_0(X_1, X)\,d\omega.$$

Для u имеем представление ([1])

$$u = \int_\Gamma Z(X, X_1)\,q(X_1)\,d\sigma + C_0, \tag{11}$$

где Z — вполне определенное ядро с особенностью типа функции Грина, $q(X)$ — след нормальной производной $\partial u / \partial n$ на Γ, а C_0 — произвольная постоянная.

Поскольку в (8) и (11) фигурирует одна и та же гармоническая функция, то из (11), (8) и (9) получаем

$$\int_\Gamma S(X, X_1)\,q(X_1)\,d\sigma = \chi(\xi, \eta) + \int_D R(X, X_1)\chi(\xi_1, \eta_1)\,d\omega +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} C_i\psi_i(X) - C_0 + H(X), \tag{12}$$

$$\int_\Gamma p_i(X)\,q(X)\,d\sigma = -\int_D \nu_i(X)\,[h(X) + \chi(\xi, \eta)]\,d\omega, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{13}$$

$$\int_\Gamma q(X)\,d\sigma = 0,$$

$$S(X, X_1) = Z(X, X_1) - \int_D N_1(X, X_2)\,Z(X_2, X_1)\,d\omega - N_1(X, X_1)\cos(n, y),$$

$$p_i(X) = \int_D \mu_i(X_i)\,Z(X_1, X)\,d\omega.$$

Таким образом, задача о наклонной производной (1) эквивалентна следующей задаче: можно ли подобрать функцию $\chi(\xi, \eta)$ и постоянные

C_i так, чтобы система (12), (13) интегральных уравнений Фредгольма первого рода относительно функции $q(X)$ была разрешимой?

Отметим, что редукцию задачи о наклонной производной к интегральным уравнениям первого рода можно провести при условии, что a, b и c таковы, что существуют аналитические в D функции α, β и γ такие, что ранг матрицы

$$Q = \begin{Vmatrix} a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b & c \\ -c & 0 & a & -c & b \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & \gamma \\ -\gamma & 0 & \alpha & -\gamma & \beta \end{Vmatrix}$$

равен 5 во всех точках области D.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
4 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Курант, Уравнения с частными производными, М., 1961. [2] С. Лефшец, Геометрическая теория дифференциальных уравнений, ИЛ, 1961. [3] А. Пуанкаре, О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, М.—Л., 1947. [4] И. Г. Петровский, Лекции по теории интегральных уравнений, «Наука», 1965.