Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 3

УДК 511 МАТЕМАТИКА

Б. М. ШИРОКОВ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛИАДИЧЕСКОЙ НОРМЫ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 3 V 1972)

В работе строится функция распределения и дается оценка остаточного члена функции

$$\|n\| = \sum_{d \not| n} \frac{1}{2^d},$$

введенной Е. В. Новоселовым (2).

Впервые распределение значений этой функции изучал М. М. Тян (6). В настоящей работе приводится усиление результатов М. М. Тяна.

Введем обозначения. $\mathfrak{S}$ — кольцо полиадических чисел, x — полиадический аргумент; для натурального n запишем его разложение на простые множители: $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$, причем $p_1^{a_1} > p_2^{a_2} > \ldots > p_k^{a_k}$; $q(n) = p_1^{a_1}$; $p(n) = p_1$; $K(n)$ — наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, q(n)$; $d(n) = n / p_1$.

Рассмотрим индуктивно заданную функцию натурального аргумента:

$$r(1) = 1, \quad r(n) = r(d(n)) - \frac{1}{K(n)} \varphi\left(\frac{K(n)}{d(n)}\right).$$

Эта функция была изучена Е. В. Новоселовым. Результаты исследования доложены им на Всесоюзной конференции по теории чисел в г. Владимире. Коротко перечислим эти результаты.

Функция $r(n)$ продолжается на $\mathfrak{S}$ со следующими свойствами:

1) $r(x)$ непрерывно отображает $\mathfrak{S}$ на отрезок $[0, 1]$.

2) Пусть $1 = d_1, d_2, \ldots, d_s = K(n)$ — все делители $K(n)$, расположенные так, что $r(d_1) \geqslant r(d_2) \geqslant \ldots \geqslant r(d_s)$. Для удобства положим $d_{s+1} = 0$.

а) $1 = r(d_1) > r(d_2) > \ldots > r(d_s) = 1 / K(n) > r(d_{s+1}) = 0$;

б) условие $(m, K(n)) = d_i$ эквивалентно тому, что $r(d_i) \geqslant r(m) > r(d_{i+1})$;

в) $r(d_i) - r(d_{i+1}) = \frac{1}{K(n)} \varphi\left(\frac{K(n)}{d_i}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, s$;

г) $\|d_1\| > \|d_2\| > \ldots > \|d_{s+1}\|$.

3) Пусть $x, y \in \mathfrak{S}$.

а) если $\|x\| = \|y\|$, то $r(x) = r(y)$;

б) если $\|x\| > \|y\|$ и $\|y\| \neq \|n\|$ либо $\|x\| \neq \|\alpha(n)\|$ (см. (3)), то $r(x) > r(y)$;

в) $r(n) = r(\alpha(n))$.

Таким образом, отображение $\|x\| \to r(x)$ осуществляет склейку Ψ (3) по смежным интервалам, сохраняя меру на Ψ (см. (5)).

Опираясь на приведенные сведения о функции $r(x)$ и результаты Е. В. Новоселова о строении множества значений $\|n\|$ (см. (3)), приступим к теме нашей работы.

Введем функцию $r_0(\lambda)$, отображающую отрезок $[0, 1/2]$ на отрезок $[0, 1]$ следующим образом:

$$r_0(\lambda) = \begin{cases} r(x), & \text{если } \lambda = \|x\|, \\ r(n), & \text{если } \|n\| < \lambda < \|\alpha(n)\|. \end{cases}$$

Теорема 1. *$r_0(\lambda)$ есть функция распределения $\|n\|$, и равномерно по λ*

$$\nu_N\{n\colon \|n\| < \lambda\} = r_0(\lambda) + O(1/\log\log N).$$

Доказательство. Первое утверждение следует из свойств функции $r(x)$ и результатов работы ([4]):

$$P\{x\colon \|x\| < \lambda\} = P\{x\colon r(x) \leqslant r_0(\lambda)\} = r_0(\lambda).$$

Воспользуемся далее приемом, предложенным Е. В. Новоселовым, который приведен в ([1]), стр. 213.

Пусть $0 < \beta < 1$ — произвольное фиксированное число, T_N — наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, [(1-\beta)\log N]$ и $N = R_N + \operatorname{res}_{T_N} N$. Тогда для $|A(\lambda)| \leqslant 2$

$$\nu_N\{n\colon \|n\| < \lambda\} = \nu_{R_N}\{n\colon \|n\| < \lambda\} + A(\lambda) N^{-\beta(1+o(1))}. \tag{1}$$

Для функции $r(\operatorname{res}_{R_N} x)$ обозначим функцию распределения через $F_N(\eta)$. Пусть $r_0(\lambda) = \eta$. Тогда для $0 \leqslant B(\lambda) \leqslant 1$

$$\nu_{R_N}\{n\colon \|n\| < \lambda\} = F_N(\eta) + B(\lambda)/R_N. \tag{2}$$

Для делителей T_N примем обозначения п. 2). Пусть d_{j-1} — тот делитель T_N, для которого

$$r(d_j) < \eta \leqslant r(d_{j-1}). \tag{3}$$

Далее, справедливы неравенства

$$r(d_j) = F_N(r(d_j)) \leqslant F_N(\eta) \leqslant F_N(r(d_{j-1})) = r(d_{j-1}). \tag{4}$$

Учитывая (1) — (4), получим

$$|\nu_N\{n\colon \|n\| < \lambda\} - r_0(\lambda)| =$$

$$= \left| F_N(\eta) - \eta + \frac{B(\lambda)}{R_N} + \frac{A(\lambda)}{N^{\beta(1+o(1))}} \right| \leqslant r(d_{j-1}) - r(d_j) + 3N^{-\beta(1+o(1))}.$$

Теперь по п. 2, в) получим

$$r(d_{j-1}) - r(d_j) \leqslant \prod_{p | T_N} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = O\left(\frac{1}{\log\log N}\right).$$

Таким образом, теорема доказана.

Если же λ принадлежит множеству

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} [\|n\|, \|\alpha(n)\|],$$

то рассуждение упрощается, а результат усиливается. В частности, в это множество попадают все двоично-рациональные λ и точки интервалов «отдыха» (по М. М. Тяну).

Теорема 2. *Если $\|n\| \leqslant \lambda \leqslant \|\alpha(n)\|$ для некоторого натурального n, то*

$$\nu_N\{m\colon \|m\| < \lambda\} = r_0(\lambda) + O(1/N),$$

причем константа зависит лишь от n, т. е. оценка равномерна по смежному интервалу.

В заключение заметим, что функция распределения, как показано Е. В. Новоселовым ([4]) (а также вытекает из нашего способа ее построения), непрерывна.

Петрозаводский государственный университет им. О. В. Куусинена

Поступило 7 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Постников, Введение в аналитическую теорию чисел, «Наука», 1971. [2] Е. В. Новоселов, Уч. зап. Елабуж. гос. пед. инст., 8 (1960). [3] Е. В. Новоселов, ДАН, 142, № 6 (1962). [4] Е. В. Новоселов, Изв. АН СССР, сер. матем., 28 (2) (1964). [5] Е. В. Новоселов, Уч. зап. Владимирск. гос. пед. инст., 25, сер. матем. (1970). [6] М. М. Тян, ДАН, 150, № 5 (1963).