

УДК 517.544

МАТЕМАТИКА

А. ЯНУШАУСКАС

ЗАДАЧА О НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 26 IV 1972)

В ⁽¹⁾ вопрос о мере недоопределенности задачи о наклонной производной с полиномиальными коэффициентами для гармонических функций трех независимых переменных редуцируется к исследованию некоторого дифференциального уравнения второго порядка с частными производными для функции двух независимых переменных. Однако в некоторых случаях более удобна другая редукция задачи о наклонной производной, которая будет приведена ниже.

Рассмотрим задачу о наклонной производной для регулярных в шаре $\Sigma: \{x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ гармонических функций u с граничным условием

$$au_x + bu_y + cu_z = f, \quad (1)$$

заданным на сфере $S: \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Коэффициенты a , b и c в (1) являются следами на S некоторых полиномов $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ и $C(x, y, z)$ таких, что уравнению первого порядка

$$Av_x + Bv_y + Cv_z = 0 \quad (2)$$

удовлетворяют два полинома p и q такие, что

$$(p_x q_y - p_y q_x)^2 + (p_x q_z - p_z q_x)^2 + (p_y q_z - p_z q_y)^2 \neq 0$$

на сфере S .

Из (2) следует, что найдется множитель $\lambda \neq 0$ на S такой, что

$$\lambda A = p_x q_y - p_y q_x, \quad \lambda B = p_x q_z - p_z q_x, \quad \lambda C = p_y q_z - p_z q_y.$$

Рассмотрим однородную задачу, соответствующую задаче (1):

$$au_x + bu_y + cu_z = 0. \quad (3)$$

Из (3) следует, что для любого аналитического в $\Sigma \cup S$ решения u задачи (3) имеет место представление

$$u = v(p, q) + (1 - x^2 - y^2 - z^2)w(x, y, z),$$

где v и w — аналитические в $\Sigma \cup S$ функции. В силу гармоничности u , функции v и w связаны соотношением

$$-\Delta \{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2 w\} = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)v_{pp} + \\ + 2(p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z)v_{pq} + (q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)v_{qq} + \Delta p v_p + \Delta q v_q, \quad (4)$$

где Δ — оператор Лапласа.

Поскольку функция w из (4) по заданной функции v определяется единственным образом, то вопрос о мере недоопределенности задачи (3) сводится к выяснению того, как можно в (4) подобрать функцию v так, чтобы уравнение (4) имело аналитическое в $\Sigma \cup S$ решение u .

Вводя в (4) новые независимые переменные $s = p$, $t = q$, $\xi = \lambda(Ax + By + Cz)$, а затем полагая $\xi = 0$, для $h(s, t) = v|_{\xi=0}$ получим соотно-

шение

$$P(s, t)h_{ss} + 2Q(s, t)h_{st} + R(s, t)h_{tt} + \alpha(s, t)h_s + \beta(s, t)h_t = \omega(s, t), \quad (5)$$

где

$$P = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)|_{\zeta=0}, \quad Q = (p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z)|_{\zeta=0}, \\ R = (q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)|_{\zeta=0}, \quad \alpha = \Delta p|_{\zeta=0}, \quad \beta = \Delta q|_{\zeta=0},$$

а функция ω однозначно определяется функцией w .

Уравнение (5) рассматривается на алгебраической поверхности $M: \{\zeta=0\}$, которая может иметь особые точки, поэтому необходимо уточнить, что понимается под решением уравнения (5). Уравнение (5) рассматривается лишь на множестве $V_2(M)$ тех точек, в которых M является аналитическим многообразием размерности 2, а в особых точках M требуется непрерывность решения и чтобы на каждой неприводимой компоненте M_i поверхности M решение (5) было следом на M аналитической в открытой окрестности M_i функции трех независимых переменных.

Рассмотрим однородное уравнение

$$P(s, t)h_{ss} + 2Q(s, t)h_{st} + R(s, t)h_{tt} + \alpha(s, t)h_s + \beta(s, t)h_t = 0, \quad (6)$$

соответствующее уравнению (5). Из соотношения (6) получаем, что решение u_0 задачи (3), соответствующее решению h_0 уравнения (6), имеет вид

$$u_0 = h_0 + (1 - x^2 - y^2 - z^2)^2 \zeta^3 \gamma(x, y, z), \quad (7)$$

где γ — аналитическая функция.

Из (7) следует, что h_0 сама является гармонической, а $\gamma \equiv 0$. Следовательно, при фиксированном ω двум различным решениям уравнения (5) соответствует аналитическая в $\Sigma \cup S$ функция w в (4) лишь в том случае, если такая функция соответствует одному из этих решений и эти решения отличаются друг от друга гармонической функцией вида $h_0(p, q)$. Таким образом, произвол в общем решении задачи (3) не больше, чем произвол в общем решении уравнения (6).

Уравнение (6) эллиплично во всех тех точках $V_2(M)$, в которых выполняется неравенство

$$(p_z q_x - q_z p_x)^2 + (p_z q_y - p_y q_z)^2 + (p_y q_x - p_x q_y)^2 > 0, \quad (8)$$

а особые точки поля $P(\lambda A, \lambda B, \lambda C)$ являются точками вырождения уравнения (6). Кривые $l: \{p = \text{const}, q = \text{const}\}$ являются траекториями поля P .

Для того чтобы выделить те решения уравнения (6), которые продолжимы вдоль траекторий поля P до однозначных в Σ функций $v(p, q)$, причем только таким решениям (6) соответствуют однозначные в Σ решения задачи (3), проведем следующие построения. Все точки множества M такие, что их можно соединить друг с другом ломаными, составленными из кусков траекторий поля P , не выходя за пределы Σ , отождествим, а отождествление отождествления обозначим τ_0 . В результате отождествления τ_0 получим из M новое множество M_0 . Через τ_1 обозначим отображение, отождествляющее такие точки множества M , которые можно соединить друг с другом любыми ломаными, составленными из кусков траекторий поля P . В результате отождествления τ_1 получим некоторое множество N_0 . Очевидно, что отображения $\tau_0: M \rightarrow M_0$ и $\tau_1: M \rightarrow N_0$ порождают отображение $\pi_0: M_0 \rightarrow N_0$ такое, что $\tau_1 = \pi_0 \circ \tau_0$.

Коэффициенты уравнения (6) аналитичны и однозначны на множестве N_0 , а решения этого уравнения ищутся в классе аналитических на M_0 функций, допускающих продолжение вдоль траекторий поля P до однозначных в шаре Σ функций $v(p, q)$. Поэтому приходится рассматривать, вообще говоря, многозначные на N_0 решения уравнения (6). Для того чтобы построить поверхность N , на которой однозначны все решения уравне-

ния (6) рассматриваемого класса, необходимо в M_0 произвести еще некоторые отождествления, вытекающие из теоремы монодромии для аналитических функций.

Для того чтобы произвести эти отождествления, выполним следующие построения. Каждая траектория поля P либо целиком лежит на M , либо пересекается с M лишь в конечном числе точек. Обозначим через λ множество точек M таких, что траектории поля P , проходящие через эти точки, целиком лежат на M . Выбросим λ из M и оставшееся множество обозначим R . На R как τ_0 , так и τ_1 , являются локальными гомеоморфизмами. Разобьем R на связные открытые компоненты M_k так, чтобы на каждом M_k отображение τ_1 было взаимно однозначным и чтобы M_k составляли открытое покрытие R . Рассмотрим два множества M_i и M_j такие, что они содержат открытые множества U_i и U_j , отождествляемые в M_0 отображением τ_0 . Возьмем точки $X_i \in U_i$ и $X_j \in U_j$ такие, что $\tau_1(X_i) = \tau_1(X_j)$ в N_0 , а через N_i и N_j обозначим образы M_i и M_j соответственно в N_0 при отображении τ_1 . Рассмотрим две различные точки $Y_i \in M_i$ и $Y_j \in M_j$ множества M_0 такие, что $\tau_0(Y_i) = \tau_0(Y_j)$ в N_0 . Точку Y_i соединим путем L_i с точкой X_i в M_i , а в M_j точку Y_j соединим с точкой X_j путем L_j . Если L_i и L_j можно так подобрать, чтобы путь $L = \tau_1(L_i) \cup \tau_1(L_j)$, который получается в N_0 из путей L_i и L_j при отображении τ_1 , можно стянуть в точку по $N_i \cup N_j$, то точки Y_i и Y_j отождествим.

Рассмотрим теперь набор $M_{j_1}, \dots, M_{j_s}$ конечного числа множества M_k и точки $X_{j_l} \in M_{j_l}$, $l = 1, \dots, s$, такие, что образы их в N_0 при отображении τ_1 совпадают. Если описанным выше способом точки X_{j_1} и X_{j_2} отождествляются и отождествляются точки X_{j_2} и X_{j_3} , то будем отождествлять все три эти точки и так далее. В результате всевозможных таких отождествлений и применения теоремы о монодромии в M_0 получим некоторое новое множество T_0 и два отображения $\rho: M_0 \rightarrow T_0$ и $\sigma: T_0 \rightarrow N_0$.

К множеству T_0 присоединим все образы в M_0 точек множества λ , в результате получим множество N . Из построения множества N и теоремы монодромии для аналитических функций следует, что всякая аналитическая на N функция h продолжается вдоль траекторий поля P до однозначной и аналитической в Σ функции $v(p, q)$ и, наоборот, след на N всякой аналитической и однозначной в Σ функции $v(p, q)$ является однозначной и аналитической функцией. Поэтому уравнение (6) рассматривается на N . Это означает, что рассматриваются те решения уравнения (6), которые принимают одинаковые значения во всех точках M , соответствующих одной и той же точке множества N при отображении $\rho \circ \tau_0$.

Пусть B — множество таких точек замыкания $\bar{N}$, все прообразы которых в M лежат на сфере S ; B является границей N . Если неравенство (8) выполняется всюду в $\Sigma \cup S$, то уравнение (6) эллиптически всюду на N и справедлива следующая

Теорема 1. Если существуют два полинома p и q , удовлетворяющие уравнению (2) и неравенству (8) в $\Sigma \cup S$, то аналитическое в $\Sigma \cup S$ решение задачи (3) однозначно определяется заданием его значений на множестве B .

Замечание. Аналогично рассматривается однородная задача о наклонной производной (3) и в том случае, когда коэффициенты граничного условия могут быть продолжены аналитически в некоторую область $D \supset \bar{\Sigma}$ так, чтобы уравнение (2) имело два независимых голоморфных в D интеграла p и q . Только теперь N будет аналитической поверхностью, а не алгебраической.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР

Поступило
5 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, «Наука», 1966.