Ордена Трудового Красного Знамени

Институт физики

Академия наук Белорусской ССР

КОВАРИАНТНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Оптика и акустика

(Сборник научных трудов)

Минск 1986

для которой задача о релаксации решается в общем виде.

Необычное поведение заряда в анизотропном полупроводнике обусловлено непропорциональностью тензоров ε и σ. Здесь уместно отметить, что существуют и другие явления, которые тоже связаны с непропорциональностью некоторых тензоров. Так, в оптике хорошо известен следующий результат. Ф.И.Федоров показал [4], что двойное лучепреломление анизотропных кристаллов связано не с самим фактом анизотропии среды, а с непропорциональностью тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости. В кристалле, в котором эти тензоры были бы пропорциональны, двойное лучепреломление не наблюдалось бы.

Выражаю благодарность Б.А.Сотскому за полезные обсуждения результатов работы.

Литература

1. Бонч-Бруевич В.Л., Калашников С.Г. Физика полупроводников. М., 1977. -672с.
2. Гусак Н.А. О возможности управления проводимостью анизотропных полупроводников с помощью неоднородного электрического поля. - Письма в ЖТФ, 1984, т.10, в.20, с.1266-1269.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М: Наука, 1971. -576С.
4. Федоров Ф.И. Оптика анизотропных сред. -Минск: издат. АН БССР, 1958.-380с.

ТЕРМОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В АКУСТИЧЕСКИ АКТИВНОЙ СРЕДЕ

Б.В.Бокуть, С.В.Шалупаев

Гомельский госуниверситет

Описание различных механических явлений, происходящих при деформировании твердых тел, требует совместного учета напряжений, вызываемых внешними силовыми источниками, и термонапряжений, являющихся следствием неравномерного теплового нагрева. В свою очередь, деформация, обусловленная силовой нагрузкой, может приводить к изменению температуры тела. В связи с этим рассмотрим задачу о построении функции Грина системы уравнений термоупругости и излучении термоупругих волн в нецентросимметричной акустически активной изотропной среде.

С точностью до членов первого порядка по параметру естественной акустической активности $\tau_{54,3}$ [1,2] известные уравнения термоупругости изотропной среды [3] преобразуются к виду

$$\left\{\nabla^2+\left(1+\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{44}}\right)\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}+\rho\tau_{54,3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{\nabla}^{\times}-\frac{1}{\lambda_{44}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}\underline{u}(\underline{z},t)-$$
$$-\frac{\gamma}{\rho\lambda_{44}}\underline{\nabla}\theta(\underline{z},t)=\left(-\frac{1}{\rho\lambda_{44}}+\tau_{54,3}\underline{\nabla}^{\times}\right)\underline{f}(\underline{z},t), \qquad (1)$$

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial t}\right)\theta(\underline{z},t)-b\frac{\partial}{\partial t}\underline{\nabla}\,\underline{u}(\underline{z},t)=-\frac{1}{\lambda}Q(\underline{z},t). \qquad (2)$$

Здесь $\theta = T - T_0$, где $T=T(\underline{z}, t)$ - абсолютная температура среды, T_0 - температура равновесного недеформированного состояния, $Q(\underline{z},t)$ - плотность мощности тепловых источников, $\underline{f}(\underline{z},t)$ - плотность внешних сил, $\varkappa$ - коэффициент температуропроводности, λ - коэффициент теплопроводности, λ_{12}, λ_{44} - компоненты приведенного тензора модулей упругости [4], $\gamma=\rho\alpha_t(2\lambda_{44}+3\lambda_{12})$, α_t - коэффициент температурного расширения, $b=\gamma T_0/\lambda$.

Систему уравнений термоупругости (1), (2) можно записать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} D^0_{ik} & D^1_i \\ D^2_k & D^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_k \\ \theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho\lambda_{44}}f_i+\tau_{54,3}e_{ijk}\nabla_j f_k \\ -\frac{1}{\lambda}Q \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

где e_{ijk} - псевдотензор Леви-Чивита, а дифференциальные операторы D^0_{ik}, D^1_i, D^2_k, D^3 определяются уравнениями (1),(2).

Функцию Грина $\hat{G}(\underline{r}-\underline{r}', t-t')$ матричного уравнения (3) также представим в виде матрицы 4x4. Уравнение для такой функции Грина запишется следующим образом

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}^0_{ik} & \mathcal{D}^1_i \\ \mathcal{D}^2_k & \mathcal{D}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{kj} & g^1_k \\ g^2_j & g^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(\underline{r}-\underline{r}')\delta(t-t'). \tag{4}$$

Разлагая $\hat{G}(\underline{r}-\underline{r}', t-t')$ в интеграл Фурье,

$$\hat{G}(\underline{R}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\, d\omega\, \hat{G}(\underline{k}, \omega)\, e^{i(\underline{k}\underline{R}-\omega\tau)} \tag{5}$$

и, используя Фурье-разложение δ-функции, из (4) найдем выражения для Фурье-компонент матричной функции Грина:

$$G(\underline{k},\omega) = \frac{k_+k_- - k^2 - i(k_+-k_-)\underline{k}^\times}{(k^2-k_1^2)(k^2-k_2^2)} - \frac{M(k)\,\underline{k}\cdot\underline{k}}{(k^2-k_+^2)(k^2-k_-^2)(k^2-k_1^2)(k^2-k_2^2)},$$

$$\underline{g}^1(\underline{k},\omega) = i\gamma\,\underline{g}(\underline{k},\omega), \quad \underline{g}^2(\underline{k},\omega) = \eta\rho\omega\lambda_{44}\,\underline{g}(\underline{k},\omega), \tag{6}$$

$$\underline{g}(\underline{k},\omega) = \frac{m\,\underline{k}}{(k^2-k_1^2)(k^2-k_2^2)}, \quad g^0(\underline{k},\omega) = \frac{m\rho\omega^2 - k^2}{(k^2-k_1^2)(k^2-k_2^2)}.$$

Здесь введены обозначения: $M(k) = \rho\lambda_{44} m[(k_+k_- - k^2)((k^2-q)a - p) - (k_+-k_-)^2(k^2-q)]$, $m = [(2\lambda_{44}+\lambda_{12})\rho]^{-1}$, $k_0^2 = \omega^2/(2\lambda_{44}+\lambda_{12})$, $\mathcal{E} = \eta\varkappa m$, $q = i\omega/\varkappa$, $p = i\gamma\eta\omega/(\rho\lambda_{44})$, а величины $k_{1,2}$ и $k_\pm$ совпадают с волновыми числами плоских монохроматических термоупругих [3] и циркулярнополяризованных упругих волн [2] соответственно

$$k_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{k_0^2 + q(1+\mathcal{E}) \pm \left[(k_0^2 + q(1+\mathcal{E}))^2 + 4qk_0^2\right]^{1/2}\right\}, \tag{7}$$

$$k_\pm = \sqrt{\frac{\omega^2}{\lambda_{44}} + \frac{1}{4}(\rho\omega^2 r_{54,3})^2} \pm \frac{1}{2}\rho\omega^2 r_{54,3} \tag{8}$$

Подстановка (6) в (5) и интегрирование по $\underline{k}$-пространству приводит к следующему выражению для функции Грина

$$G(\underline{R},\omega) = G_+^0(\underline{R},\omega) + G_-^0(\underline{R},\omega) + \sum_\alpha G_\alpha(\underline{R},\omega),$$

$$\underline{g}(\underline{R},\omega) = \underline{g}_1(\underline{R},\omega) + \underline{g}_2(\underline{R},\omega), \quad g^0(\underline{R},\omega) = g_1^0(\underline{R},\omega) + g_2^0(\underline{R},\omega), \tag{9}$$

$$G_\pm^0 = -\frac{k_\pm e^{ik_\pm R}}{4\pi R(k_+ + k_-)}\left(1 \mp i\underline{c}^\times\left(1 - \frac{1}{ik_\pm R}\right)\right),$$

$$G_\alpha = -\frac{M(k_\alpha)k_\alpha^3 e^{ik_\alpha R}}{2\pi\xi_\alpha R}\left(\frac{1}{ik_\alpha R} + \frac{1}{k_\alpha^2 R^2} + \underline{c}\cdot\underline{c}\left(1 - \frac{3}{ik_\alpha R} - \frac{3}{k_\alpha^2 R^2}\right)\right),$$

$$\underline{g}_{1,2} = \frac{m k_{1,2} e^{ik_{1,2}R}}{(k_{1,2}^2 - k_{2,1}^2)R}\,\underline{c}\left(1 - \frac{1}{ik_{1,2}R}\right),$$

$$g_{1,2}^0 = \frac{k_0^2 - k_{1,2}}{4\pi(k_{1,2}^2 - k_{2,1}^2)R}\, e^{ik_{1,2}R},$$

удовлетворяющей принципу отвода энергии от источника.

В (6) $\underline{c} = \underline{R}/R$, α пробегает значения α =(+,-,I,2), а $\xi_\pm$, $\xi_{1,2}$ имеют вид:

$$\xi_\pm = 2k_\pm(k_\pm^2 - k_\mp^2)(k_\pm^2 - k_1^2)(k_\pm^2 - k_2^2),$$

$$\xi_{1,2} = 2k_{1,2}(k_{1,2}^2 - k_{2,1}^2)(k_{1,2}^2 - k_+^2)(k_{1,2}^2 - k_-^2).$$

Для монохроматических источников формулы (9) дают функцию Грина системы уравнений термоупругости (I), (2) в акустически активной среде. Причем выражения (9) остаются в силе и в том случае, если среда обладает частотной дисперсией.

Решения системы (I), (2) для источников с произвольной зависимостью от времени будут представляться следующим образом

$$\begin{bmatrix} \underline{u}(\underline{r},t) \\ \theta(\underline{r},t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int d^3r'\, d\omega\, e^{-i\omega t} \begin{bmatrix} G(\underline{R},\omega) & \underline{g}^1(\underline{R},\omega) \\ \underline{g}^2(\underline{R},\omega) & g^0(\underline{R},\omega) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{\rho\lambda_{44}(\omega)} + r_{54,3}(\omega)\underline{\nabla}^\times\right)\underline{f}(\underline{r}',\omega) \\ -\frac{1}{\lambda(\omega)}\,Q(\underline{r}',\omega) \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где $\underline{f}(\underline{r},\omega)$, $Q(\underline{r},\omega)$ – временные Фурье-образы функций $\underline{f}(\underline{r},t)$, $Q(\underline{r},t)$.

Проиллюстрируем применение выражения (I0) на примере полей, создаваемых в среде с частотной дисперсией квазимонохроматическими источниками:

$$\underline{f}(\underline{r},t) = \underline{f}_\omega(\underline{r},t)\,e^{-i\omega t}, \quad Q(\underline{r},t) = Q_\omega(\underline{r},t)\,e^{-i\omega t}. \tag{11}$$

Разлагая в (II) амплитуды во временной интеграл Фурье и, учитывая медленность их изменения во времени по сравнению с экспоненциальным множителем, из (9),(I0) найдем выражения для полей упругих деформаций и температурных полей

$$\underline{u}(\underline{r},t) = \sum_\alpha \underline{u}_\alpha^0(\underline{r},t) + \sum_\alpha \underline{u}_\alpha(\underline{r},t),$$

$$\mathbf{u}^0_\pm=\frac{k_\pm}{4\pi(k_++k_-)}\int\frac{d^3r'}{R}\left(1\mp i\mathbf{c}^\times\left(1-\frac{1}{ik_\pm R}\right)\right)\Phi^\pm(\mathbf{r}',t),$$

$$\mathbf{u}_\alpha=\frac{M(k_\alpha)k_\alpha^3}{2\pi\,\varsigma_\alpha}\int\frac{d^3r'}{R}\left(\frac{1}{ik_\alpha R}+\frac{1}{k_\alpha^2R^2}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}\left(1-\frac{3}{ik_\alpha R}-\frac{3}{k_\alpha^2R^2}\right)\right)\Phi^\alpha(\mathbf{r}',t),$$

$$\mathbf{u}^0_{1,2}=-\frac{i\gamma m k_{1,2}}{4\pi\varkappa(k_{1,2}^2-k_{2,1}^2)}\int\frac{d^3r'}{R}\left(1-\frac{1}{ik_{1,2}R}\right)Q_\omega(\mathbf{r}',t-R/S_{1,2})\,e^{-i\omega(t-R/v_{1,2})},$$

$$\theta(\mathbf{r},t)=\theta_1^0(\mathbf{r},t)+\theta_2^0(\mathbf{r},t)+\theta_1(\mathbf{r},t)+\theta_2(\mathbf{r},t), \tag{12}$$

$$\theta^0_{1,2}=\frac{k_0^2-k_{1,2}^2}{4\pi\varkappa(k_{1,2}^2-k_{2,1}^2)}\int\frac{d^3r'}{R}\,Q_\omega(\mathbf{r}',t-R/S_{1,2})\,e^{-i\omega(t-R/v_{1,2})},$$

$$\theta_{1,2}=-\frac{\rho\lambda_{44}\omega^2\gamma m k_{1,2}}{k_{1,2}^2-k_{2,1}^2}\int\frac{d^3r'}{R}\,\mathbf{c}\left(1-\frac{1}{ik_{1,2}R}\right)\Phi^{1,2}(\mathbf{r}',t).$$

Здесь $\varsigma_\alpha=d\omega/dk_\alpha$ – групповая скорость волн, и $\Phi^\alpha(\mathbf{r},t)$ определяется выражением

$$\Phi^\alpha(\mathbf{r},t)=\left(\frac{1}{\rho\lambda_{44}}-r_{54,3}\,\mathrm{rot}\right)\mathbf{f}_\omega(\mathbf{r},t-R/S_\alpha)\,e^{-i\omega(t-R/v_\alpha)}.$$

В приведенных формулах (12) поля $\mathbf{u}^0_{1,2}(\mathbf{r},t)$ определяют вклад тепловых источников в упругие колебания среды, а температурные поля $\theta_{1,2}(\mathbf{r},t)$ порождены внешними силовыми нагрузками.

Если пренебречь вкладом внешних сил в температурные поля, то тем самым мы перейдем к задаче определения деформаций, возникающих в среде при заданных температурных полях и внешних нагрузках. В пренебрежении частотной дисперсией среды и частотной зависимостью фазовых скоростей $v_\pm$, временной Фурье-образ $G(\mathbf{R},\omega)$ тензорной функции Грина $G(\mathbf{R},\tau)$ формулируемой задачи по-прежнему будет определяться формулами (9), но α уже пробегает значения $\alpha=(+,-,0)$ и, кроме того, выполняются соотношения:

$$\frac{M(k_0)}{\varsigma_0}=\frac{1}{2k_+k_-k_0},\qquad\frac{M(k_\pm)}{\varsigma_\pm}=-\frac{1}{2(k_++k_-)k_\pm^2},$$

Переходя известным образом от временного Фурье-образа $G(\mathbf{R},\omega)$ к оригиналу $G(\mathbf{R},\tau)$, функцию Грина уравнения упругости акустически активной среды запишем в виде

$$G(\mathbf{R},\tau)=G^+(\mathbf{R},\tau)+G^-(\mathbf{R},\tau)+G^0(\mathbf{R},\tau),$$

$$G^\pm=-\frac{v_\mp}{4\pi(v_++v_-)R}\Big[2\,\mathbf{e}_\pm\cdot\mathbf{e}_\pm^*\,\delta(\tau-R/v_\pm)+(1-3\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})\Big(\frac{v_\pm}{R}h(\mu_\pm)+$$

$$+\frac{v_\pm^2}{R^2}\mu_\pm h(\mu_\pm)\mp i\mathbf{c}^\times\frac{v_\pm}{R}h(\mu_\pm)\Big)\Big], \tag{13}$$

$$G^0=-\frac{v_+v_-}{4\pi v_0^2R}\Big[\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}\,\delta(\tau-R/v_0)-(1-3\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})\Big(\frac{v_0}{R}h(\mu_0)+\frac{v_0^2}{R^2}\mu_0h(\mu_0)\Big)\Big].$$

Здесь $\mu_\alpha=\tau-R/v_\alpha$, $\mathbf{e}_\pm\cdot\mathbf{e}_\pm^*=\frac{1}{2}(1\mp i\mathbf{c}^\times-\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})$, $h(\mu_\alpha)$ – единичная функция.

В дальней зоне запаздывающие решения для поля деформаций, возбужденного внешними силовыми источниками и неоднородными температурными полями в акустически активной изотропной среде будут иметь вид:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\mathbf{u}_+(\mathbf{r},t)+\mathbf{u}_-(\mathbf{r},t)+\mathbf{u}_0(\mathbf{r},t),$$

$$\mathbf{u}_\pm=\frac{v_\mp}{2\pi(v_++v_-)}\int d^3r'\,\mathbf{e}_\pm\,\frac{\mathbf{e}_\pm^*\,\mathbf{F}(\mathbf{r}',t-R/v_\pm)}{R}, \tag{14}$$

$$\mathbf{u}_0=\frac{v_\mp}{4\pi v_0^2}\int d^3r'\,\mathbf{c}\,\frac{\mathbf{c}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}',t-R/v_0)}{R},$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)=\left(\frac{1}{\rho\lambda_{44}}-r_{54,3}\,\mathrm{rot}\right)\mathbf{f}(\mathbf{r},t)-\frac{\gamma}{\rho\lambda_{44}}\,\mathrm{grad}\,\theta(\mathbf{r},t)$

Из (14) видно, что противоположно поляризованные циркулярные акустические волны $\mathbf{u}_+$ и $\mathbf{u}_-$ составляют поперечную часть вектора упругой деформации и распространяются с различными фазовыми скоростями v_+ и v_-, что является аналогом циркулярного двупреломления поперечных плоских акустических волн в естественно гиротропной среде. Волна $\mathbf{u}_0$ распространяется в радиальном направлении и ее скорость совпадает с фазовой скоростью v_0 продольной плоской звуковой волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А. О естественном вращении плоскости поляризации звука. – Изв. вузов. Радиофизика, 1960, т.3, №4, с.645–649.
2. Сердюков А.Н. Круговой дихроизм в акустике кристаллов с пространственной дисперсией. – Кристаллография, 1977, т.22, №3, с.459–462.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975, 871 с.
4. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 386 с.

В настоящий сборник включены работы, тематика которых касается разнообразных вопросов современной оптики и акустики кристаллов. В большинстве работ сборника широко используется ковариантный метод Ф.И.Федорова.

Ответственный за выпуск – канд. физ.-мат. наук Б.А.Сотский
Печатается по решению РИСО АН БССР.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 6

А.Г.Хаткевич
Групповая теория распространения и преобразования волн в кристаллах 7-15

Н.А.Гусак
Релаксация заряда в анизотропном полупроводнике в квадрупольном электрическом поле 16-24

Б.В.Бокуть, С.В.Шалупаев
Термоупругие волны в акустически активной среде 25-29

Б.В.Бокуть, С.С.Гиргель
Определение векторов рефракции из уравнения нормалей для линейных анизотропных и гиротропных сред 30-32

Е.А.Гусак, В.В.Филиппов
Продольный сдвиг при отражении от поглощающих (усиливающих) сред 33-41

В.В.Филиппов, Н.Н.Сендер
Определение главных значений тензора диэлектрической проницаемости поглощающих ромбических кристаллов низших сингоний на основе приближенных соотношений 42-46

В.А.Карпенко
Вариационный принцип на границах частичных областей в теории некоторых типов оптических волноводов 47-55

В.А.Карпенко, В.Н.Могилевич
К теории оптических волокон с двуосной анизотропией 56-60

В.Н.Могилевич, А.А.Романенко
Метод потенциальных функций в теории планарных анизотропных оптических волноводов 61-68

В.Г.Кукушкин
Распространение эллиптических вращающихся гауссовых пучков в симметричной квадратичной среде 69-78