Математика

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ФУНКТОРНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Р. В. Бородич,¹ О. А. Шпырко²

Изучаются пересечения заданных максимальных подгрупп в конечных группах. Устанавливаются общие свойства обобщенной подгруппы Фраттини с помощью функторного метода.

Ключевые слова: конечная группа, максимальная подгруппа, подгруппа Фраттини, функтор.

Intersections of given maximal subgroups of finite groups are studied. General properties of the generalised Frattini subgroup are established with the help of the functor method.

Key words: finite group, maximal subgroup, Frattini subgroup, functor.

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. В теории конечных групп центральное место занимают объекты, экстремально расположенные в группе. К таким объектам в первую очередь относятся максимальные подгруппы. Одно из направлений теории пересечений максимальных подгрупп связано с задачей о свойствах пересечений заданных максимальных подгрупп и исследованием влияния этих свойств на подгрупповое и нормальное строение группы. Данное направление берет начало с работы Фраттини [1], установившего нильпотентность пересечения $\Phi(G)$ всех максимальных подгрупп конечной группы G . Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах многих авторов (см. монографии [2] и [3]). В настоящее время развитие данной теории связано с введением функторного метода.

Согласно [3], m -функтором называется функция Θ , которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\Theta(G)$ ее максимальных подгрупп и саму группу G ; при этом предполагается, что если $M \in \Theta(G)$, то $M^x \in \Theta(G)$ для всех $x \in G$.

Максимальная подгруппа, не являющаяся нормальной, называется абнормальной.

Согласно [3], на множестве m -функторов можно определить операции пересечения следующим образом: $(\Theta_1 \cap \Theta_2)(G) = \Theta_1(G) \cap \Theta_2(G)$.

Назовем m -функтор

1) тривиальным, если $\Theta(G) \setminus \{G\}$ — множество всех максимальных подгрупп группы G для любой группы G ;

2) абнормально полным, если для любой группы G множество $\Theta(G)$ содержит все абнормальные максимальные подгруппы группы G .

Если Θ — m -функтор и $M \in \Theta(G)$, то M будем называть Θ -подгруппой группы G . Обозначим через $\Phi_\Theta(G)$ и назовем Θ -подгруппой Фраттини пересечение всех Θ -подгрупп группы G . Если m -функтор тривиальный, то Θ -подгруппа Фраттини совпадает с подгруппой Фраттини $\Phi(G)$.

Использование функторного метода позволяет изучать различные обобщенные подгруппы Фраттини. И как продолжение исследований в этом направлении рассмотрим пересечение максимальных подгрупп группы G , не сопряженных с данной.

Пусть Θ — m -функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряженных максимальных подгрупп и саму группу. Тогда $\Theta(G)$ — множество всех максимальных подгрупп группы G , которые не сопряжены с некоторой фиксированной максимальной подгруппой M группы G . Понятно, что $\Theta(G)$ содержит и саму группу G . При этом $\Phi_\Theta(G) = M_G$ — ядро подгруппы M в группе G . Очевидно, что $\Phi_{\bar{\Theta}}(G) \cap M_G = \Phi(G)$ для любой группы G .

Возникает естественный вопрос: обладает ли подгруппа $\Phi_{\bar{\Theta}}(G)$ общими свойствами для различных максимальных подгрупп, выделяемых m -функтором Θ ?

Обозначим через $\bar{\Phi}_{\Theta_1 \cap \Theta}^p(G)$ пересечение не p -нильпотентных абнормальных максимальных Θ -подгрупп, не сопряженных с некоторой максимальной подгруппой. В случае, когда m -функтор Θ выделяет в группе

¹Бородич Руслан Викторович — канд. физ.-мат. наук, начальник научно-иссл. сектора Учреждения образования "Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины", e-mail: borodich@gsu.by.

²Шпырко Ольга Алексеевна — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. прикладной математики отд-я естественных наук филиала МГУ в г. Севастополе, e-mail: shpyrko@mail.ru.

G все абнормальные максимальные подгруппы, подгруппу $\bar{\Phi}_{\Theta_1 \cap \Theta}^p(G)$ будем обозначать $\bar{\Delta}_{\Theta_1}^p(G)$. Если Θ выделяет в группе G все максимальные подгруппы, то подгруппу $\bar{\Phi}_{\Theta_1 \cap \Theta}^p(G)$ будем обозначать $\bar{\Phi}_{\Theta_1}^p(G)$. Для формации нильпотентных групп будем применять обозначение $\bar{\Phi}_{\Theta_1 \cap \Theta}^{\mathfrak{N}}(G)$. Подгруппы $\bar{\Delta}_{\Theta_1}^{\mathfrak{N}}(G)$ и $\bar{\Phi}_{\Theta_1}^{\mathfrak{N}}(G)$ определяются соответственно.

Всегда полагаем, что пересечение пустого множества подгрупп из G совпадает с самой группой G .

Лемма 1 [4]. Пусть p — простое нечетное число. Группа G является p -нильпотентной тогда и только тогда, когда для любой подгруппы P , характеристической в некоторой силовой p -подгруппе группы G , $N_G(P)/C_G(P)$ — p -подгруппа.

Напомним следующие определения. Пусть $\mathfrak{E}_{\pi'}$ — формация всех π' -групп, $\mathfrak{F}$ — одна из следующих формаций:

- $\mathfrak{A}_{\pi}$ — формация всех абелевых π -групп;
- $\mathfrak{N}_{\pi}$ — формация всех нильпотентных π -групп;
- $\mathfrak{S}_{\pi}$ — формация всех разрешимых π -групп.

Ясно, что произведение $\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{F}$ снова формация, состоящая из π' -замкнутых групп, π -холловы подгруппы которых принадлежат $\mathfrak{F}$. Очевидно, что $\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{A}_{\pi} \subseteq \mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{N}_{\pi} \subseteq \mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{S}_{\pi}$.

Пусть теперь G — неединичная π -разрешимая группа, тогда $G \neq G^{\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{F}}$ и $G \in (\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{F})^{(t)}\mathfrak{E}_{\pi'}$ для некоторого натурального t . Если $G \in (\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{F})^{(t)}\mathfrak{E}_{\pi'} \setminus (\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{F})^{(t-1)}\mathfrak{E}_{\pi'}$, то t называется $\mathfrak{F}$ -длиной группы G и обозначается $l_{\mathfrak{F}}^{\pi}(G)$ [2].

В частности, возможны следующие случаи:

если $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}_{\pi}$, то $l_{\mathfrak{A}_{\pi}}^{\pi}(G) = l_{\pi}^{\mathfrak{A}}(G)$ есть производная π -длина группы G [5]; кроме того, если $\pi(G) \subseteq \pi$, то мы получаем производную длину разрешимой группы G , которая обозначается $d(G)$;

если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\pi}$, то $l_{\mathfrak{N}_{\pi}}^{\pi}(G) = l_{\pi}^{\mathfrak{N}}(G)$ и мы говорим о нильпотентной π -длине группы G ; более того, если $\pi(G) \subseteq \pi$, то мы получаем нильпотентную длину разрешимой группы G ;

если $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi}$, то $l_{\mathfrak{S}_{\pi}}^{\pi}(G) = l_{\pi}(G)$ и речь идет о π -длине группы G . Если $\pi(G) \subseteq \pi$, то $l_{\pi}(G) = 1$.

В случае $\pi = \{p\}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ мы имеем p -длину p -разрешимой группы $l_p(G)$ [6].

Очевидно, что $l_{\mathfrak{A}_{\pi}}^{\pi}(G) \geq l_{\mathfrak{N}_{\pi}}^{\pi}(G) \geq l_{\pi}(G)$ для всех π -разрешимых групп G .

Напомним, группа G называется метанильпотентной, если существует такая нормальная подгруппа K , что группа K и факторгруппа G/K — нильпотентные группы.

Лемма 2. Если G — метанильпотентная группа, то $l_{\pi}(G) \leq 1$ и $l_{\pi}^{\mathfrak{N}}(G) \leq 2$ для любого множества π простых чисел.

Доказательство. Пусть G — метанильпотентная группа, тогда существует такая нормальная нильпотентная подгруппа N в группе G , факторгруппа G/N по которой также нильпотентна. Так как N — нильпотентная подгруппа, то $N = N_{\pi} \times N_{\pi'}$. Поскольку подгруппа $N_{\pi'}$ характеристична в N , а N нормальна в G , то $N_{\pi'} \triangleleft G$. Таким образом, группа G обладает следующим нормальным (π', π) -рядом:

$$1 \triangleleft N_{\pi'} \triangleleft N_{\pi} \times N_{\pi'} \triangleleft G_{\pi}N = G_{\pi}(N_{\pi} \times N_{\pi'}) = G_{\pi}N_{\pi'} \triangleleft G.$$

Так как $N \triangleleft G$, N и G/N суть π -разрешимые группы с нильпотентной π -холловой подгруппой, а факторы $N_{\pi'}$ и $G/G_{\pi}N_{\pi'}$ этого ряда являются π' -группами, то $l_{\pi}^{\mathfrak{N}}(G) \leq 2$. Из соотношения $G_{\pi}N/N \triangleleft G/N$ следует $l_{\pi}(G) \leq 1$. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть Θ_1 — m -функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряженных максимальных подгрупп и саму группу, Θ — абнормально полный m -функтор и $p > 2$. Тогда для любой не p -разрешимой группы G справедливо включение $\bar{\Phi}_{\Theta_1 \cap \Theta}^p(G)/P \subseteq \Phi_{\Theta}(G/P)$, где P — нормальная p -подгруппа группы G .

Доказательство. Обозначим $D = \bar{\Phi}_{\Theta_1 \cap \Theta}^p(G)$. Пусть P — силовая p -подгруппа из D , не содержащаяся в максимальной $\Theta_1 \cap \Theta$ -подгруппе M . По лемме Фраттини $G = DN_G(P)$.

Предположим, что $N_G(P) \neq G$. Пусть R — максимальная подгруппа группы G , такая, что $N_G(P) \subseteq R$. Из абнормальности $N_G(P)$ следует, что $R \in \Theta(G)$. Так как $G = DR$, то R — p -нильпотентная или не p -нильпотентная подгруппа, сопряженная с максимальной подгруппой M . Если предположить, что R не p -нильпотентная подгруппа, сопряженная с максимальной подгруппой M , то в силу соотношения $|G : M| \neq |G : R|$ получаем противоречие. Остается заключить, что R — p -нильпотентная Θ -подгруппа группы G . Следовательно, $N_G(P)$ — p -нильпотентная подгруппа.

Если D p -нильпотентна, то нетрудно видеть, что группа G p -разрешима. Противоречие.

Будем считать, что D не p -нильпотентна. Тогда по лемме 1 найдется характеристическая подгруппа P^* из P , такая, что $N_D(P^*)/C_D(P^*)$ не p -группа. Так как $N_G(P) \subseteq N_G(P^*)$, то $G = DN_G(P^*)$.

Возможны случаи: $N_G(P^*) = G$ либо $N_G(P^*)$ p -нильпотентна. Так как $N_D(P^*)/C_D(P^*)$ не p -группа, то второй случай невозможен. Остается принять, что $N_D(P^*)/C_D(P^*)$ не p -группа и $P^* \triangleleft G$.

Пусть P^* — максимальная среди характеристических подгрупп группы P , обладающая отмеченными выше свойствами. Так как $N_G(P)$ p -нильпотентна, то $P^* \subset P$. Пусть P_0/P^* — характеристическая подгруппа группы P/P^* . Тогда P_0 характеристична в P и $P^* \subset P_0$. Ввиду выбора подгруппы P^* получаем, что $N_D(P_0)/C_D(P_0)$ — p -группа.

Заметим, что $N_{D/P^*}(P_0/P^*) = N_D(P_0)/P^*$ и $C_D(P_0)P^*/P^* \subseteq C_{D/P^*}(P_0/P^*)$. Отсюда получаем, что $N_{D/P^*}(P_0/P^*)/C_{D/P^*}(P_0/P^*)$ — p -группа. Следовательно, по лемме 1 группа D/P^* является p -нильпотентной. Но тогда D является p -разрешимой группой. Отсюда и из p -разрешимости G/D следует p -разрешимость и самой группы G . Противоречие. Остается заключить, что P — нормальная p -подгруппа группы G .

Так как M не содержит P , то несложно заметить, что $\bar{\Phi}_{\Theta_1 \cap \Theta}^p(G)/P \subseteq \Phi_{\Theta}(G/P)$. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть Θ_1 — t -функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряженных максимальных подгрупп и саму группу, Θ — абнормально полный t -функтор и $p > 2$. Тогда в любой не p -разрешимой группе G существует нормальная p -подгруппа P , такая, что $\bar{\Phi}_{\Theta_1 \cap \Theta}^p(G)/P \in \mathfrak{N}$.

Следствие 2. Пусть Θ_1 — t -функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряженных максимальных подгрупп и саму группу, Θ — абнормально полный t -функтор и $p > 2$. Тогда в любой не p -разрешимой группе G подгруппа $\bar{\Phi}_{\Theta_1 \cap \Theta}^p(G) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}$.

В случае, когда t -функтор Θ выделяет в каждой группе все абнормальные максимальные подгруппы, из теоремы 1 получаем

Следствие 3. Пусть Θ_1 — t -функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряженных максимальных подгрупп и саму группу, и $p > 2$. Тогда в любой не p -разрешимой группе G существует нормальная p -подгруппа P , такая, что $\bar{\Delta}_{\Theta_1}^p(G)/P \subseteq \Delta(G/P)$.

Следствие 4. Пусть Θ_1 — t -функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряженных максимальных подгрупп и саму группу, и $p > 2$. Тогда в любой не p -разрешимой группе подгруппа $\bar{\Delta}_{\Theta_1}^p(G) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}$.

Следствие 5. В любой не p -разрешимой группе G , $p > 2$, подгруппа, которая равна пересечению не p -нильпотентных абнормальных максимальных подгрупп, не сопряженных с некоторой максимальной подгруппой, метанильпотентна.

Если t -функтор Θ является тривиальным, то из теоремы 1 получаем

Следствие 6. Пусть Θ_1 — t -функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряженных максимальных подгрупп и саму группу, и $p > 2$. Тогда в любой не p -разрешимой группе G существует нормальная p -подгруппа P , такая, что $\bar{\Phi}_{\Theta_1}^p(G)/P \subseteq \Phi(G/P)$.

Следствие 7. Пусть Θ_1 — t -функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряженных максимальных подгрупп и саму группу, и $p > 2$. Тогда в любой не p -разрешимой группе подгруппа $\bar{\Phi}_{\Theta_1}^p(G) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}$.

Следствие 8. В любой не p -разрешимой группе G , $p > 2$, подгруппа, равная пересечению не p -нильпотентных максимальных подгрупп, не сопряженных с некоторой максимальной подгруппой, метанильпотентна.

Отметим, что лемма 2 позволяет оценить π -длину и нильпотентную π -длину соответствующих подгрупп для произвольного множества простых нечетных чисел.

Теорема 2. Пусть Θ_1 — t -функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряженных максимальных подгрупп и саму группу, Θ — абнормально полный t -функтор. Тогда для любой неразрешимой группы G справедливо включение $\bar{\Phi}_{\Theta_1 \cap \Theta}^{\mathfrak{N}}(G)/P \subseteq \Phi_{\Theta}(G/P)$, где P — нормальная p -подгруппа группы G .

Доказательство. Несложно заметить, что

$$\bar{\Phi}_{\Theta_1 \cap \Theta}^p(G) \supseteq \bar{\Phi}_{\Theta_1 \cap \Theta}^{\mathfrak{N}}(G) \supseteq \Phi_{\Theta}(G).$$

Если G неразрешима, то G не p -разрешима для некоторого $p \in \pi(G)$. Если $p > 2$, то по теореме 1 имеем $\bar{\Phi}_{\Theta_1 \cap \Theta}^p(G)/P \subseteq \Phi_{\Theta}(G/P)$, а следовательно, $\bar{\Phi}_{\Theta_1 \cap \Theta}^{\mathfrak{N}}(G)/P \subseteq \Phi_{\Theta}(G/P)$. Пусть G p -разрешима для любого нечетного $p \in \pi(G)$. Нетрудно видеть, что в этом случае G является разрешимой.

Следствие 9. Пусть Θ_1 — t -функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряженных максимальных подгрупп и саму группу, Θ — абнормально полный t -функтор. Тогда в любой неразрешимой группе G существует нормальная p -подгруппа P , такая, что $\bar{\Phi}_{\Theta_1 \cap \Theta}^{\mathfrak{N}}(G)/P \in \mathfrak{N}$.

В случае, когда t -функтор Θ выделяет в каждой группе все абнормальные максимальные подгруппы, из теоремы 2 получаем следствия:

Следствие 10. Пусть Θ_1 — m -функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряженных максимальных подгрупп и саму группу. Тогда в любой неразрешимой группе G существует нормальная p -подгруппа P , такая, что $\bar{\Delta}_{\Theta_1}^m(G)/P \subseteq \Delta(G/P)$.

Следствие 11. Пусть Θ_1 — m -функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряженных максимальных подгрупп и саму группу. Тогда в любой неразрешимой группе подгруппа $\bar{\Delta}_{\Theta_1}^m(G) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$.

Следствие 12. В любой неразрешимой группе G пересечение нильпотентных абнормальных максимальных подгрупп, не сопряженных с некоторой максимальной подгруппой, метанильпотентно.

Если m -функтор Θ является тривиальным, то из теоремы 2 получаем

Следствие 13. Пусть Θ_1 — m -функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряженных максимальных подгрупп и саму группу. Тогда в любой неразрешимой группе G существует нормальная p -подгруппа P , такая, что $\bar{\Phi}_{\Theta_1}^m(G)/P \subseteq \Phi(G/P)$.

Следствие 14. Пусть Θ_1 — m -функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряженных максимальных подгрупп и саму группу. Тогда в любой не p -разрешимой группе подгруппа $\bar{\Phi}_{\Theta_1}^m(G) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$.

Следствие 15. В любой неразрешимой группе G подгруппа, равная пересечению нильпотентных максимальных подгрупп, не сопряженных с некоторой максимальной подгруппой, метанильпотентна и ее π -длина не больше 1, а нильпотентная π -длина не больше 2, где π — произвольное множество простых чисел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Frattini G. Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni // Atti Acad. Lincei. 1885. 1. 281–285.
2. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
3. Селькин М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Минск: Беларуская навука, 1997.
4. Thompson J.G. Normal p -complements for finite groups // J. Algebra. 1964. 1. 43–46.
5. Шпырко О.А. О производной π -длине конечной π -разрешимой группы // Таврич. вестн. информ. и матем. 2005. № 1. 49–54.
6. Hall P., Higman G. On the p -length of p -soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem // Proc. London Math. Soc. 1956. 3. 1–42.

Поступила в редакцию
04.09.2009

УДК 512.543.52 + 512.544.7

ПОРЯДКОВАЯ ОТДЕЛИМОСТЬ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ С ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ

В. В. Едынак¹

В статье доказывается свойство порядковой отделимости для свободного произведения двух свободных групп с объединенными максимальными циклическими подгруппами.

Ключевые слова: свободные произведения, аппроксимационные свойства.

The order separability is proved for the free product of two free groups with the maximal cyclic amalgamated subgroups.

Key words: free products, residual properties.

Определение 1. Пусть даны группа G и натуральное число n , превосходящее 1. Группа G называется n -порядково отделимой, если для любых элементов $g_1, \dots, g_n$ группы G , таких, что g_i не сопряжено с $g_j^{\pm 1}$, $1 \leq i < j \leq n$, существует гомоморфизм из группы G в конечную группу, такой, что порядки образов элементов $g_1, \dots, g_n$ попарно различны.

В работе [1] было доказано, что свободные группы 2-порядково отделимы. Автором [2] было установлено, что 2-порядковая отделимость переносится на свободные произведения. Целью данной работы является доказательство следующей теоремы.

¹Едынак Владимир Васильевич — асп. каф. высшей алгебры мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: edynak_vova@mail.ru.