УДК 512.542

О свойствах $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп с ограничениями на индексы

Р.В. Бородич, М.В. Селькин

Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

В данной работе изучаются свойства пересечений $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп заданного индекса, выделяемых подгрупповым m-функтором. Необходимые определения и обозначения можно найти в работах [1–3]. В дальнейшем π – некоторое множество простых чисел, все рассматриваемые классы групп содержат единичные группы.

В настоящее время развитие теории пересечений максимальных подгрупп связано с введением функторного метода [3], позволяющего строить новые обобщения подгруппы Фраттини и исследовать влияние свойств этих подгрупп на строение группы.

Согласно [3] m-функтором называется функция Θ, которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\Theta(G)$ ее максимальных подгрупп и саму группу G; при этом предполагается, что если $M \in \Theta(G)$, то $M^x \in \Theta(G)$ для всех $x \in G$.

Пусть P – множество всех простых чисел. Если $p \in P$ и $\pi \subseteq P$, то $\pi' = P \setminus \pi$; $p' = P \setminus \{p\}$. Подгруппа H группы G называется S_π-подгруппой, если $|G:H|$ не делится на числа из π.

Через $O_\pi(G)$ обозначают наибольшую нормальную π-подгруппу группы G.

Максимальная подгруппа, не являющаяся нормальной, называется абнормальной.

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$-нормальной ($\mathfrak{F}$-абнормальной), если $G^{\mathfrak{F}}$ содержится (соответственно не содержится) в M, где $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Согласно [3] на множестве m-функторов можно определить операции пересечения следующим образом: $(\Theta_1 \cap \Theta_2)(G) = \Theta_1(G) \cap \Theta_2(G)$.

Согласно работе [4] m-функтор Θ будем называть

1) тривиальным, если $\Theta(G) \setminus \{G\}$ – множество всех масимальных подгрупп группы G для любой группы G;

Адрес для корреспонденции: 246019, г. Гомель, ул. Советская, д. 104, e-mail: Borodich@gsu.by – Бородич Р.В.

2) абнормально полным, если для любой группы G, множество $\Theta(G)$ содержит все абнормальные максимальные подгруппы группы G, вместе с самой группой G;

3) $\mathfrak{F}$-абнормальным, если в каждой группе G m-функтор $\Theta(G)$ выделяет все $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы вместе с самой группой G, где $\mathfrak{F}$ – непустая формация.

Подгрупповой m-функтор Θ называется регулярным [3], если выполняются следующие условия:

1) из $N \lhd G$ и $M \in \Theta(G)$ следует $MN/N \in \Theta(G/N)$;

2) из $M/N \in \Theta(G/N)$ следует $M \in \Theta(G)$.

Если Θ – m-функтор и $M \in \Theta(G)$, то M будем называть Θ-подгруппой группы G. Для пересечения всех Θ-подгрупп группы G будем использовать обозначение $\Phi_{\Theta}(G)$.

Определение. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Обозначим через $\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G)$ – пересечение всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных Θ-подгрупп группы G;*

$\Phi_{\Theta_{\bar{\pi}}}^{\mathfrak{F}}(G)$ ($\Phi_{\Theta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G)$) – пересечение всех тех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных Θ-подгрупп группы G, индекс каждой из которых не является (является) π-числом;

$\overline{\Phi}_{\Theta_{\bar{\pi}}}^{\mathfrak{F}}(G)$ – пересечение всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных Θ-подгрупп группы G, не принадлежащих $\mathfrak{F}$, индекс каждой из которых не является π-числом. В случае отсутствия подгрупп с указанными свойствами считаем, что эти пересечения равны G.

Если m-функтор Θ является тривиальным, то будем использовать ставшими традиционными обозначения $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$, $\Delta_{\bar{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G)$, $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$, $\overline{\Delta}_{\bar{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G)$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, Θ – абнормально полный регулярный m-функтор и $\overline{\Phi}_{\Theta_{\bar{\pi}}}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$. Если в группе G подгруппа $\Phi_{\Theta_{\bar{\pi}}}(G)$ обладает свойством C_{π}, то*

$$\overline{\Phi}_{\Theta_{\bar{\pi}}}^{\mathfrak{F}}(G)/O_{\pi}(G) = \Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G/O_{\pi}(G)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале покажем, что

$$K = \overline{\Phi}_{\Theta_{\bar{\pi}}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\Theta_{\bar{\pi}}}(G).$$

Пусть $K \not\subset \Phi_{\Theta_{\bar{\pi}}}(G)$. Тогда в G найдется такая максимальная Θ-подгруппа M, индекс которой не делится на простое число из π, что $G = KM$. Понятно, что M не содержит $G^{\mathfrak{F}}$. Если $M \notin \mathfrak{F}$, то $K \subseteq \overline{\Phi}_{\Theta_{\bar{\pi}}}^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq M$, что невозможно. Следовательно, $M \in \mathfrak{F}$. Отсюда

$$G/K = MK/KM/M \cap K \in \mathfrak{F},$$

а это значит, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K \subseteq \overline{\Phi}_{\Theta_{\bar{\pi}}}^{\mathfrak{F}}(G)$. Это противоречит существованию в группе G $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной Θ-подгруппы, индекс которой не делится на простые числа из π. Итак, $K \subseteq \Phi_{\Theta_{\bar{\pi}}}(G)$.

Пусть $O_\pi(G) \neq 1$. Тогда ввиду того, что

$$\Phi_{\Theta_\pi^-}(G)/O_\pi = \Phi(G/O_\pi(G)),$$

получаем справедливость теоремы для группы $G/O_\pi(G)$ по индукции. Следовательно,

$$\overline{\Phi}_{\Theta_\pi^-}^{\mathfrak{I}}(G/O_\pi(G))/O_\pi(G/O_\pi(G)) = \Phi_\Theta^{\mathfrak{I}}(G/O_\pi(G)/O_\pi(G/O_\pi(G))).$$

Так как $O_\pi(G/O_\pi(G)) = 1$ и

$$\overline{\Phi}_{\Theta_\pi^-}^{\mathfrak{I}}(G/O_\pi(G)) = \overline{\Phi}_{\Theta_\pi^-}^{\mathfrak{I}}(G)/O_\pi(G),$$

то

$$\overline{\Phi}_{\Theta_\pi^-}^{\mathfrak{I}}(G)/O_\pi(G) = \Phi_\Theta^{\mathfrak{I}}(G/O_\pi(G)).$$

Пусть теперь $O_\pi(G) = 1$. Тогда

$$\overline{\Phi}_{\Theta_\pi^-}^{\mathfrak{I}}(G) \cap G^{\mathfrak{I}} \subseteq \Phi_{\Theta_\pi^-}(G) = \Phi_\Theta(G).$$

Пусть K/N – главный фактор группы G, причем

$$\Phi_\Theta(G) \subseteq N \subseteq K \subseteq \overline{\Phi}_{\Theta_\pi^-}^{\mathfrak{I}}(G).$$

Так как

$$K \cap G^{\mathfrak{I}} \subseteq \overline{\Phi}_{\Theta_\pi^-}^{\mathfrak{I}}(G) \cap G^{\mathfrak{I}} \subseteq \Phi_\Theta(G),$$

то

$$N = N(K \cap G^{\mathfrak{I}}) = K \cap NG^{\mathfrak{I}}.$$

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$KG^{\mathfrak{I}}/NG^{\mathfrak{I}} K/K \cap NG^{\mathfrak{I}} = K/N(K \cap G^{\mathfrak{I}}) = K/N.$$

Так как $G/NG^{\mathfrak{I}} \in \mathfrak{I}$, то главный фактор $KG^{\mathfrak{I}}/NG^{\mathfrak{I}}$ является $\mathfrak{I}$-центральным в G. Следовательно, главный фактор K/N также является $\mathfrak{I}$-центральным в G. Таким образом, $\overline{\Phi}_{\Theta_\pi^-}^{\mathfrak{I}}(G)/\Phi_\Theta(G)$ – $\mathfrak{I}$-гиперцентраль-ная нормальная подгруппа группы $G/\Phi_\Theta(G)$. Поэтому

$$\overline{\Phi}_{\Theta_\pi^-}^{\mathfrak{I}}(G)/\Phi_\Theta(G) \subseteq Z_\infty^{\mathfrak{I}}(G/\Phi_\Theta(G)).$$

С другой стороны, на основании леммы 4 из [4]

$$\overline{\Phi}_{\Theta_\pi^-}^{\mathfrak{I}}(G)/\Phi_\Theta(G) \supseteq \Phi_\Theta^{\mathfrak{I}}(G)/\Phi_\Theta(G) = Z_\infty^{\mathfrak{I}}(G/\Phi_\Theta(G)).$$

Значит,

$$\overline{\Phi}_{\Theta_\pi^-}^{\mathfrak{I}}(G)/\Phi_\Theta(G) = Z_\infty^{\mathfrak{I}}(G/\Phi_\Theta(G)).$$

Следовательно,

$$\overline{\Phi}_{\Theta_\pi^-}^{\mathfrak{I}}(G)/\Phi_\Theta(G) = \Phi_\Theta^{\mathfrak{I}}(G)/\Phi_\Theta(G),$$

то есть $\overline{\Phi}_{\Theta_\pi^-}^{\mathfrak{I}}(G) = \Phi_\Theta^{\mathfrak{I}}(G)$. Теорема доказана.

Следствие 1.1. *Пусть $\Im$ – нормально наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, Θ – абнормально полный регулярный m-функтор и $\overline{\Phi}^{\Im}_{\Theta_\pi^-}(G) \neq G$. Если подгруппа $\Phi_{\Theta_\pi^-}(G)$ обладает свойством C_π, то*

$$\overline{\Phi}^{\Im}_{\Theta_\pi^-}(G)/O_\pi(G) \in \Im.$$

Так как в любой группе G подгруппа $\Phi_{\Theta_p^-}(G)$ обладает свойством C_p, то при $\pi = \{p\}$ получаем следующий результат.

Следствие 1.2. *Пусть $\Im$ – формация, Θ – абнормально полный регулярный m-функтор, $\overline{\Phi}^{\Im}_{\Theta_p^-}(G) \neq G$. Тогда*

$$\overline{\Phi}^{\Im}_{\Theta_p^-}(G)/O_p(G) = \Phi^{\Im}_{\Theta}(G/O_p(G)).$$

Следствие 1.3. *Пусть Θ – абнормально полный регулярный m-функтор, $\overline{\Phi}^{\Im}_{\Theta_p^-}(G) \neq G$. Если $\Im$ – нормально наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, то $\overline{\Phi}^{\Im}_{\Theta_p^-}(G)/O_p(G) \in \Im$.*

В случае, когда m-функтор Θ тривиальный, то из теоремы 1 получаем соответствующий результат из [3].

В теореме 1 одно из условий, что подгруппа $\Phi_{\Theta_\pi^-}(G)$ обладает свойством C_π. Данное обстоятельство можно обойти, введя следующее определение.

Определение. *Обозначим через $\delta^{\Im}_{\Theta_\pi^-}(G)$ – пересечение всех $\Im$-абнор-мальных максимальных Θ-подгрупп группы G, содержащих $O_\pi(G)$;*

$\overline{\delta}^{\Im}_{\Theta_\pi^-}(G)$ – пересечение всех $\Im$-абнормальных максимальных Θ-подгрупп группы G, содержащих $O_\pi(G)$ и не принадлежащих $\Im$;

$\varphi_{\Theta_\pi^-}(G)$ – пересечение всех максимальных Θ-подгрупп группы G, содержащих $O_\pi(G)$. В случае отсутствия подгрупп с указанными свойствами считаем, что эти пересечения равны G.

Лемма 1. *Пусть $\Im$ – формация, Θ – абнормально полный регулярный m-функтор, N – нормальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

если $N \subseteq \varphi_{\Theta_\pi^-}(G)$, то $\varphi_{\Theta_\pi^-}(G/N) = \varphi_{\Theta_\pi^-}(G)/N$;

если $N \subseteq \varphi_{\Theta_\pi^-}(G)$, то $\delta^{\Im}_{\Theta_\pi^-}(G/N) = \delta^{\Im}_{\Theta_\pi^-}(G)/N$;

если $N \subseteq \varphi_{\Theta_\pi^-}(G)$ и $\overline{\delta}^{\Im}_{\Theta_\pi^-}(G)/N \neq G/N$, то $\overline{\delta}^{\Im}_{\Theta_\pi^-}(G/N) = \overline{\delta}^{\Im}_{\Theta_\pi^-}(G)/N$.

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

Лемма 2. *Пусть Θ – абнормально полный регулярный m-функтор. Тогда*

1) $\varphi_{\Theta_\pi^-}(G) \supseteq \Phi_{\Theta_\pi^-}(G)$ *;*

2) $\varphi_{\Theta_\pi^-}(G)$ *–* π *-замкнутая подгруппа;*

3) $\varphi_{\Theta_\pi^-}(G)/O_\pi(G) = \Phi_\Theta(G/O_\pi(G))$ *;*

4) если $\Phi_{\Theta_\pi^-}(G)$ *обладает свойством* C_π *, то* $\varphi_{\Theta_\pi^-}(G) = \Phi_{\Theta_\pi^-}(G)$ *.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $\varphi_{\Theta_\pi^-}(G) \supseteq \Phi_{\Theta_\pi^-}(G)$.

Покажем, что подгруппа $\varphi_{\Theta_\pi^-}(G)$ π -замкнута. Пусть $O_\pi(G)$ – неединичная подгруппа, N – минимальная нормальная подгруппа группы G , $N \subseteq O_\pi(G)$. По лемме 1 имеем

$$\varphi_{\Theta_\pi^-}(G/N) = \varphi_{\Theta_\pi^-}(G)/N.$$

Для G/N утверждение теоремы верно по индукции.

Следовательно, группа $\varphi_{\Theta_\pi^-}(G/N)$ π -замкнута. Так как N – π -группа, то из π -замкнутости $\varphi_{\Theta_\pi^-}(G)/N$ следует, что $\varphi_{\Theta_\pi^-}(G)$ – π -замкнутая подгруппа.

Пусть теперь $O_\pi(G) = 1$. По определению подгруппы $\varphi_{\Theta_\pi^-}(G)$ имеем в этом случае, что $\varphi_{\Theta_\pi^-}(G) = \Phi_\Theta(G)$, причем $\varphi_{\Theta_\pi^-}(G)$ обладает единичной π -холловской подгруппой. Очевидно, $\varphi_{\Theta_\pi^-}(G)$ – π -замкнутая подгруппа, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что

$$\varphi_{\Theta_\pi^-}(G)/O_\pi(G) = \Phi_\Theta(G/O_\pi(G)).$$

Пусть M – максимальная Θ -подгруппа группы G и $O_\pi(G) \subseteq M$. Так как $O_\pi(G)$ – характеристическая подгруппа, то очевидно, что $M/O_\pi(G)$ – максимальная Θ -подгруппа группы $G/O_\pi(G)$. Следовательно,

$$\Phi_{\Theta_\pi^-}(G/O_\pi(G)) \subseteq \varphi_{\Theta_\pi^-}(G)/O_\pi(G) = \varphi_{\Theta_\pi^-}(G/O_\pi(G)).$$

С другой стороны, так как $O_\pi(G/O_\pi(G)) = 1$, то по определению подгруппы $\varphi_{\Theta_\pi^-}(G)$ получаем, что

$$\varphi_{\Theta_\pi^-}(G/O_\pi(G)) = \Phi_{\Theta_\pi^-}(G/O_\pi(G)).$$

Предположим теперь, что $\Phi_{\Theta_\pi^-}(G)$ обладает свойством C_π . По ранее доказанному имеем, что

$$\Phi_{\Theta_\pi^-}(G)/O_\pi(G) = \Phi_{\Theta_\pi^-}(G/O_\pi(G)) = \varphi_{\Theta_\pi^-}(G)/O_\pi(G).$$

Следовательно, $\Phi_{\Theta_\pi^-}(G) = \varphi_{\Theta_\pi^-}(G)$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{I}$ *– локальная формация,* Θ *– абнормально полный регулярный* m *-функтор. Тогда*

$$\delta^{\mathfrak{I}}_{\Theta^{-}_{\pi}}(G)/O_{\pi}(G)=\Phi^{\mathfrak{I}}_{\Theta}(G/O_{\pi}(G)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M – $\mathfrak{I}$ -абнормальная максимальная Θ -подгруппа группы G и $O_{\pi}(G)\subseteq M$. Так как

$$(G/O_{\pi}(G))^{\mathfrak{I}}=G^{\mathfrak{I}}O_{\pi}(G)/O_{\pi}(G),$$

то $M/O_{\pi}(G)$ – $\mathfrak{I}$ -абнормальная максимальная Θ -подгруппа в $G/O_{\pi}(G)$. Таким образом,

$$\Phi^{\mathfrak{I}}_{\Theta}(G/O_{\pi}(G))\subseteq\delta^{\mathfrak{I}}_{\Theta^{-}_{\pi}}(G/O_{\pi}(G))=\delta^{\mathfrak{I}}_{\Theta^{-}_{\pi}}(G)/O_{\pi}(G).$$

Обратно, если подгруппа $M/O_{\pi}(G)$ – максимальная $\mathfrak{I}$ -абнормальная Θ - подгруппа в $G/O_{\pi}(G)$, то подгруппа M – $\mathfrak{I}$ -абнормальная максимальная Θ -подгруппа в G , содержащая $O_{\pi}(G)$. Следовательно,

$$\delta^{\mathfrak{I}}_{\Theta^{-}_{\pi}}(G/O_{\pi}(G))=\delta^{\mathfrak{I}}_{\Theta^{-}_{\pi}}(G)/O_{\pi}(G)\subseteq\Phi^{\mathfrak{I}}_{\Theta}(G/O_{\pi}(G)).$$

Отсюда имеем

$$\delta^{\mathfrak{I}}_{\Theta^{-}_{\pi}}(G)/O_{\pi}(G)=\Phi^{\mathfrak{I}}_{\Theta^{-}_{\pi}}(G/O_{\pi}(G)),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2.1. *Пусть* $\mathfrak{I}$ *– локальная формация,* Θ *– абнормально полный регулярный* m *-функтор,* $\Phi_{\Theta^{-}_{\pi}}(G)$ *обладает свойством* C_{π} *. Тогда* $\delta^{\mathfrak{I}}_{\Theta^{-}_{\pi}}(G)=\Phi^{\mathfrak{I}}_{\Theta^{-}_{\pi}}(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теоремам 1 и 2 имеем

$$\delta^{\mathfrak{I}}_{\Theta^{-}_{\pi}}(G)/O_{\pi}(G)=\Phi^{\mathfrak{I}}_{\Theta}(G/O_{\pi}(G))=\Phi^{\mathfrak{I}}_{\Theta^{-}_{\pi}}(G)/O_{\pi}(G).$$

Следовательно, $\delta^{\mathfrak{I}}_{\Theta^{-}_{\pi}}(G)=\Phi^{\mathfrak{I}}_{\Theta^{-}_{\pi}}(G)$.

Следствие 2.2. *Пусть* $\mathfrak{I}$ *– локальная формация,* Θ *– абнормально полный регулярный* m *-функтор. Тогда*

$$\delta^{\mathfrak{I}}_{\Theta^{-}_{p}}(G)\cap\delta^{\mathfrak{I}}_{\Theta^{-}_{q}}(G)=\Phi^{\mathfrak{I}}_{\Theta}(G)$$

для любых $p\neq q$.

Справедливость утверждения следует из справедливости теоремы Силова для $\Phi_{\Theta^{-}_{p}}(G)$ и $\Phi_{\Theta^{-}_{q}}(G)$ и следствия 2.1.

В частном случае, когда m -функтор Θ тривиальный, то из теоремы 2 получаем результат М.В. Селькина из [5].

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{I}$ *– локальная формация,* Θ *– абнормально полный регулярный* m *-функтор,* $\overline{\delta}^{\mathfrak{I}}_{\Theta^{-}_{\pi}}(G)\neq G$ *. Тогда*

$$\overline{\delta}^{\mathfrak{I}}_{\Theta^{-}_{\pi}}(G)/O_{\pi}(G)=\Phi^{\mathfrak{I}}_{\Theta}(G/O_{\pi}(G)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что

$$K=\overline{\delta}^{\mathfrak{I}}_{\Theta^{-}_{\pi}}(G)\cap G^{\mathfrak{I}}\subseteq\varphi_{\Theta^{-}_{\pi}}(G).$$

Пусть $K \not\subset \varphi_{\Theta_\pi^-}(G)$. Тогда в G найдется максимальная Θ-подгруппа M, не содержащая $G^{\Im}$. Если $M \notin \Im$, то

$$K \subseteq \overline{\delta}_{\Theta_\pi^-}^{\Im}(G) \subseteq M,$$

что невозможно. Следовательно, $M \in \Im$. Отсюда

$$G/K = MK/KM/M \cap K \in \Im.$$

А это значит, что $G^{\Im} \subseteq K \subseteq \overline{\delta}_{\Theta_\pi^-}^{\Im}(G)$. Это противоречит существованию в группе G $\Im$-абнормальной максимальной Θ-подгруппы и определению подгруппы $\overline{\delta}_{\Theta_\pi^-}^{\Im}(G)$. Следовательно, $K \subseteq \varphi_{\Theta_\pi^-}(G)$.

Пусть $O_\pi(G) \neq 1$. Тогда ввиду того, что

$$\varphi_{\Theta_\pi^-}(G)/O_\pi(G) = \Phi_\Theta(G/O_\pi(G)),$$

получаем справедливость теоремы для группы $G/O_\pi(G)$ по индукции. Следовательно,

$$\overline{\delta}_{\Theta_\pi^-}^{\Im}(G/O_\pi(G))/O_\pi(G/O_\pi(G)) = \Phi_\Theta^{\Im}(G/O_\pi(G)/O_\pi(G/O_\pi(G))).$$

Так как $O_\pi(G/O_\pi(G)) = 1$, то

$$\overline{\delta}_{\Theta_\pi^-}^{\Im}(G/O_\pi(G)) = \Phi_{\Theta_\pi^-}^{\Im}(G/O_\pi(G)).$$

Из леммы 1 получаем, что

$$\overline{\delta}_{\Theta_\pi^-}^{\Im}(G)/O_\pi(G) = \Phi_\Theta^{\Im}(G/O_\pi(G)).$$

Пусть теперь $O_\pi(G) = 1$. По определению подгруппы $\overline{\delta}_{\Theta_\pi^-}^{\Im}(G)$ имеем, что $\overline{\delta}_{\Theta_\pi^-}^{\Im}(G) = \overline{\Phi}_{\Theta_\pi^-}^{\Im}(G)$, а определению подгруппы $\varphi_{\Theta_\pi^-}(G)$ –

$$\varphi_{\Theta_\pi^-}(G) = \Phi_{\Theta_\pi^-}(G) = \Phi_\Theta(G).$$

Тогда из теоремы 1 получаем, что $\overline{\Phi}_{\Theta_\pi^-}^{\Im}(G) = \Phi_\Theta^{\Im}(G)$. Следовательно, $\overline{\delta}_{\Theta_\pi^-}^{\Im}(G) = \Phi_\Theta^{\Im}(G)$, что и требовалось доказать.

Следствие 3.1. *Пусть $\Im$ – нормально наследственная локальная формация, Θ – абнормально полный регулярный m-функтор, $\overline{\delta}_{\Theta_\pi^-}^{\Im}(G) \neq G$. Тогда*

$$\overline{\delta}_{\Theta_\pi^-}^{\Im}(G)/O_\pi(G) \in \Im.$$

Если Θ – тривиальный m-функтор, то из теоремы 3 следует результат из [5].

Теорема 4. *Пусть $\Im$ – нормально наследственная локальная формация, Θ – абнормально полный регулярный m-функтор, π – некоторое множество простых чисел. Тогда $\delta_{\Theta_\pi^-}^{\Im}(G) = AB$, где*

1) $A/O_\pi(G) \in \Im$;

2) $B \subseteq \varphi_{\Theta_{\bar{\pi}}}(G)$;

3) $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{I}) \subseteq \pi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим фактор-группу $G/O_{\pi}(G)$. Из теоремы 2 имеем, что

$$\delta_{\Theta_{\bar{\pi}}}^{\mathfrak{I}}(G)/O_{\pi}(G) = \Phi_{\Theta}^{\mathfrak{I}}(G/O_{\pi}(G)),$$

а по лемме 2 – $\varphi_{\Theta_{\bar{\pi}}}(G)/O_{\pi}(G) = \Phi_{\Theta}(G/O_{\pi}(G))$. Применяя к группе $\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{I}}(G/O_{\pi}(G))$ теорему 1 из [4], получаем

$$\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{I}}(G/O_{\pi}(G/O_{\pi}(G))) = (A/O_{\pi}(G))(B/O_{\pi}(G)),$$

где

$$A/O_{\pi}(G) \in \mathfrak{I}, B/O_{\pi}(G) \subseteq \Phi_{\Theta}(G/O_{\pi}(G)), \pi(B/O_{\pi}(G)) \cap \pi(\mathfrak{I}) = \varnothing.$$

Следовательно, $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{I}) \subseteq \pi$. Так как

$$\Phi_{\Theta}(G/O_{\pi}(G)) = \varphi_{\Theta_{\bar{\pi}}}(G)/O_{\pi}(G), \textit{то } B \subseteq \varphi_{\Theta_{\bar{\pi}}}(G).$$

Отсюда получаем, что

$$A \cap B = O_{\pi}(G), A/O_{\pi}(G) \in \mathfrak{I}.$$

Так как

$$\delta_{\Theta_{\bar{\pi}}}^{\mathfrak{I}}(G)/O_{\pi}(G) = \Phi_{\Theta}^{\mathfrak{I}}(G/O_{\pi}(G)),$$

то $\delta_{\Theta_{\bar{\pi}}}^{\mathfrak{I}}(G) = AB$, что и требовалось доказать.

Если m -функтор Θ тривиальный, то из теоремы 4 вытекает результат из [5].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. ***Шеметков, Л.А.*** Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 267 с.
2. ***Шеметков, Л.А.*** Конечные разрешимые группы / Л.А. Шеметков // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – Т. 32, № 3. – С. 577–589.
3. ***Селькин, М.В.*** Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 144 с.
4. ***Бородич, Е.Н.*** О пересечении $\mathfrak{I}$ -абнормальных максимальных Θ -подгрупп / Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2007. – № 3. – С. 47–52.
5. ***Селькин, М.В.*** Некоторые обобщения подгруппы Фраттини / М.В. Селькин, А.В. Сидоров // Вопросы алгебры. – 1996. – Вып. 9. – С. 138–143.

S U M M A R Y

There are investigated properties of $\mathfrak{I}$-abnormal maximal subgroups of finite groups in the given work.

Поступила в редакцию 19.03.2010