

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М., 1978. – 267 с.
2. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. М., 1989. – 256 с.

S U M M A R Y

In this paper the classification of hereditary soluble formations $\mathcal{F}$ with the lattice property for permutable $\mathcal{F}$ -composition subgroups is obtained.

Поступила в редакцию 15.12.2002

УДК 512.542

Р.В. Бородич

Об абнормальных подгруппах конечных групп с заданной группой операторов

Все рассматриваемые группы конечны. Изучение групп с операторами является важной задачей в связи с их применением в решении различных классических проблем теории групп. В монографии [1] М.В. Селькиным построена общая теория пересечений максимальных подгрупп в конечных группах. В настоящей работе в соответствии с [1] рассматривается задача изучения свойств пересечений ядер некоторых абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп группы G , имеющей заданную группу операторов A . Получены операторные аналоги результатов В. Гашюца [2], М.В. Селькина [1], В.В. Шлыка [3] и др.

Пусть A и G – некоторые группы и φ – некоторый фиксированный гомоморфизм группы A в группу $\text{Aut}(G)$. В этом случае говорят, что задано действие группы A на группе G , и группа A является группой операторов группы G .

Предположим, что группа G имеет группу операторов A . Подгруппа $H \neq G$ группы G называется максимальной A -допустимой подгруппой в G , если H является A -допустимой и любая собственная A -допустимая подгруппа из G , содержащая подгруппу H , совпадает с H .

Пусть π – некоторое множество (возможно пустое) простых чисел. Введем следующее обозначение.

$M_\pi^a(G, A)$ – множество всех абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп группы G , индексы которых не делятся на числа из фиксированного множества простых чисел π . С помощью $M_\pi^a(G, A)$ определим:

$$\Delta_\pi(G, A) = \begin{cases} \bigcap M_G, M \in M_\pi^a(G, A), & \text{если } M_\pi^a \neq \emptyset; \\ G, & \text{если } M_\pi^a(G, A) = \emptyset. \end{cases}$$

Если $\pi = \emptyset$, то будем писать $\Delta_\pi(G, A) = \Delta(G, A)$.

Нетрудно видеть, что $\Delta_\pi(G, A)$ является нормальной A -допустимой подгруппой группы G .

Другие используемые в работе обозначения и определения стандартны, их можно найти в [1, 4]. Напомним только, что подгруппа H группы G называется абнормальной в G , если $g \in \langle H, H^g \rangle$ для любого элемента $g \in G$.

Для доказательства основных результатов нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. Пусть группа G имеет группу операторов A . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если H – A -допустимая подгруппа группы G , то $N_G(H)$ также является A -допустимой подгруппой в G ;

2) если $(|G|, |A|)=1$, и группа G обладает свойством C_π , то в G существует A -допустимая холлова π -подгруппа.

Доказательство. Утверждение 1) следует из теоремы 2.1.1 монографии [5].

Утверждение 2) доказывается аналогично утверждению 1) теоремы 6.2.2 из [5].

Лемма 2. Пусть K – нормальная подгруппа из G , обладающая свойством C_π и H – холлова π -подгруппа из K . Тогда $N_G(H)$ – абнормальная подгруппа группы G .

Доказательство. Заметим, что для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x \rangle \subseteq K$, то есть H является пронормальной подгруппой в G . Тогда по лемме 17.1. из [4] подгруппа $N_G(H)$ является абнормальной в G . Лемма доказана.

Следующая лемма 3 – это хорошо известный результат Томпсона [6].

Лемма 3. Пусть p – простое нечётное число. Группа G является p -нильпотентной тогда и только тогда, когда для любой подгруппы P , характеристической в некоторой силовской подгруппе группы G выполняется, что $N_G(P)/C_G(P)$ является p -подгруппой.

Теорема 1. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|)=1$. Тогда подгруппа $\Delta(G, A)$ нильпотентна.

Доказательство. Обозначим через $D = \Delta(G, A)$. Пусть $p \in \pi(D)$. По 2) леммы 1 в D существует A -допустимая силовская p -подгруппа P . По лемме Фраттини $G = N_G(P)D$.

По 1) леммы 1 подгруппа $N_G(P)$ является A -допустимой. Если $N_G(P) = G$, то $P \triangleleft G$, а значит, $P \triangleleft D$. Предположим, что $N_G(P) \neq G$. По лемме 2 подгруппа $N_G(P)$ является абнормальной в G . Следовательно, $N_G(P)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной A -допустимой подгруппе M группы G . Но тогда $D \subseteq M$ и $G = N_G(P)D = MD = M$. Получили противоречие с предположением $N_G(P) \neq G$. Итак, любая силовская подгруппа из D нормальна в ней. Отсюда заключаем, что подгруппа $D = \Delta(G, A)$ нильпотентна. Теорема доказана.

Если положить $A=1$, то из теоремы 1 получаем известный результат Гашюца [2].

Теорема 2. Пусть группа G не p -разрешима для некоторого нечётного простого числа p и имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|)=1$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) группа G имеет, по крайней мере, одну не p -нильпотентную абнормальную максимальную A -допустимую подгруппу;

2) пересечение ядер всех не p -нильпотентных абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп совпадает с $\Delta(G, A)$.

Доказательство. Установим справедливость утверждения 1). Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p -нильпотентных групп. Так как группа G не p -разрешима, то $K = G^{\mathfrak{F}} \notin \mathfrak{F}$. Ясно, что K является A -допустимой группой.

Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $O_p(G)=1$. По 2) леммы 1 в K найдется A -допустимая силовская p -подгруппа P . Так как K не p -нильпотентна, то по лемме 3 в P найдётся характеристическая, а значит, A -допустимая подгруппа $R \neq 1$ такая, что $N_K(R)/C_K(R)$ не является p -группой.

Это означает, что $N_K(R)$ не является r -нильпотентной группой. Из A -допустимости R и 1) леммы 1 следует A -допустимость подгруппы $N_G(R)$. Из $N_K(R) \subseteq N_G(R)$ и наследственности формации $\mathfrak{F}$ вытекает, что $N_G(R) \notin \mathfrak{F}$. Так как $O_p(G)=1$, то $N_G(R) \neq G$.

По лемме 2 $N_G(P)$ — абнормальная подгруппа в группе G . Так как $N_G(P) \subseteq N_G(R)$, то не трудно видеть, что $N_G(R)$ также является абнормальной подгруппой в G . Так как любая подгруппа, содержащая $N_G(R)$ является абнормальной и не r -нильпотентной, то в качестве искомой подгруппы выберем максимальную A -допустимую подгруппу, содержащую $N_G(R)$. Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Пусть группа G не r -разрешима. Обозначим через D пересечение ядер всех не r -нильпотентных абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп в группе G . Согласно доказанному утверждению 1) в G найдётся, по крайней мере, одна не r -нильпотентная абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа. Следовательно, $D \neq G$.

Очевидно, что $\Delta(G, A) \subseteq D$. Предположим, что $\Delta(G, A) \subset D$. Тогда в группе G найдётся r -нильпотентная абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа M такая, что $MD=G$. Отсюда следует, что $G/D \cong M/M \cap D \in \mathfrak{F}$, а значит G/D r -разрешима.

Чтобы получить противоречие, докажем r -разрешимость подгруппы D . Воспользуемся леммой 3. Пусть P — A -допустимая силовская r -подгруппа из D . По лемме Фраттини $G=DN_G(P)$. Тогда $N_G(P)=G$ или $N_G(P)$ является r -нильпотентной группой.

Пусть $N_G(P)=G$. Тогда $P \triangleleft G$, а значит D является r -разрешимой. Следовательно, r -разрешимой является группа G . Получили противоречие с выбором G .

Остается принять, что $N_G(P) \neq G$ и $N_G(P)$ r -нильпотентна. Если D r -нильпотентна, то рассуждая, как и выше, получаем r -разрешимость группы G . Противоречие. Поэтому будем считать, что D не r -нильпотентна.

Тогда по лемме 3 найдётся характеристическая в P подгруппа P^* такая, что $N_D(P^*)/C_D(P^*)$ не является r -группой. Так как $N_G(P^*) \supseteq N_G(P)$, то $G=DN_G(P^*)$. Заметим, что P^* — A -допустимая, а $N_G(P^*)$ — A -допустимая абнормальная подгруппа в G . Поэтому возможны ситуации: $N_G(P^*)=G$ или $N_G(P^*)$ является r -нильпотентной группой.

Если $N_G(P^*)$ r -нильпотентна, то $N_D(P^*)$ также является r -нильпотентной группой. Тогда по лемме 3 получаем, что $N_D(P^*)/C_D(P^*)$ — r -группа. Получили противоречие.

Остается рассмотреть случай, когда $P^* \triangleleft G$ и $N_G(P^*)/C_G(P^*)$ — не r -группа. Заметим, что $P^* \neq P$. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что P^* — максимальная среди характеристических подгрупп группы P , обладающая отмеченными выше свойствами.

Рассмотрим группу G/P^* . Из A -допустимости P^* следует, что A является группой операторов для G/P^* . Так как G/P^* — не r -разрешима, то D/P^* не r -нильпотентна. Тогда по лемме 3 в P/P^* найдётся характеристическая подгруппа P_0/P^* такая, что $N_{D/P^*}(P_0/P^*)/C_{D/P^*}(P_0/P^*)$ не является r -группой. Заметим, что P_0 — характеристическая подгруппа в P . Ввиду выбора подгруппы P^* получаем, что $N_D(P_0)/C_D(P_0)$ является r -группой. Заметим, что $N_{D/P^*}(P_0/P^*) = N_D(P_0)/P^*$ и $C_{D/P^*}(P_0/P^*) \supseteq C_D(P_0)P^*/P^*$. Тогда $N_D(P_0)/P^*/C_D(P_0)/P^* \cong N_D(P_0)/C_D(P_0)$ является r -группой. Теперь нетрудно заметить, что r -группой является и группа $N_{D/P^*}(P_0/P^*)/C_{D/P^*}(P_0/P^*)$. Получили противоречие. Следовательно, D/P^* r -нильпотентна, а значит D — r -разрешимая группа. Отсюда и из r -разрешимости G/D следует r -разрешимость

группы G . Получили противоречие. Следовательно, $D=\Delta(G,A)$. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$. Тогда в произвольной неразрешимой группе существуют ненильпотентные абнормальные максимальные A -допустимые подгруппы, причем пересечение ядер всех таких подгрупп нильпотентно.

Доказательство. Так как G – неразрешимая группа, то по теореме Фейта-Томпсона $2 \in \pi(G)$, и найдется такое простое нечетное число p , что G не p -разрешима. Поскольку множество всех ненильпотентных абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп содержит множество всех не p -нильпотентных абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп, то результат следует из теоремы 2. Теорема доказана.

Если положить $A=1$, то из теорем 2 и 3 вытекают соответствующие результаты Шлыка из [3].

Перейдём к изучению подгруппы $\Delta_\pi(G,A)$ в случае, когда π – некоторое непустое множество простых чисел.

Лемма 4. Пусть группа G имеет группу операторов A . Тогда, если N – нормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N \subseteq \Delta_\pi(G,A)$, то

$$\Delta_\pi(G/N,A) = \Delta_\pi(G,A)/N.$$

Доказательство осуществляется проверкой.

Теорема 4. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, и подгруппа $\Delta_\pi(G,A)$ обладает свойством C_π . Тогда

$$\Delta_\pi(G,A)/O_\pi(G) = \Delta(G/O_\pi(G),A).$$

Доказательство. Пусть $\Delta_\pi(G,A) = D$. Очевидно, что $O_\pi(G) \subseteq D$. По 2) лемме 1 в D найдётся A -допустимая холлова π -подгруппа H . Тогда по лемме Фраттини $G = DN_G(H)$. По 1) леммы 1 $N_G(H)$ – A -допустимая подгруппа в G .

Предположим, что $N_G(H) \neq G$. Тогда по лемме 2 подгруппа $N_G(H)$ является абнормальной в G . Поэтому в G найдётся абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа M такая, что $N_G(H) \subseteq M$.

Легко проверить, что $\pi(|G:N_G(H)|) \cap \pi = \emptyset$. Отсюда и из $N_G(H) \subseteq M$ следует, что $D \subseteq M$. Но тогда $G = DN_G(H) = DM = M$. Получили противоречие.

Остается принять, что $H < G$. Отсюда следует, что $\pi(|D/O_\pi(G)|) \cap \pi = \emptyset$.

Очевидно, что $\Delta(G/O_\pi(G),A) \subseteq D/O_\pi(G)$.

Предположим, что $\Delta(G/O_\pi(G),A) \subsetneq D/O_\pi(G)$. Тогда в G найдётся абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа R такая, что $O_\pi(G) \subseteq R$ и $RD = G$. Заметим, что $|G:R| = |D:(D \cap R)|$, а значит $\pi(|G:R|) \cap \pi = \emptyset$. Но тогда $D \subseteq R$. Получили противоречие с выбором R . Таким образом, $\Delta(G/O_\pi(G),A) = D/O_\pi(G)$. Теорема доказана.

Учитывая теорему 1, получаем следующее

Следствие 4.1. Пусть G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$ и подгруппа $\Delta_\pi(G,A)$ обладает свойством C_π . Тогда $\Delta_\pi(G,A)/O_\pi(G)$ нильпотентна.

Если $\pi = \{p\}$, где p – некоторое простое число, то подгруппу $\Delta_\pi(G,A)$ будем обозначать через $\Delta_p(G,A)$.

Следствие 4.2. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$. Тогда $\Delta_p(G,A)/O_p(G) = \Delta(G/O_p(G),A)$. В частности, $\Delta_p(G,A)/O_p(G)$ нильпотентна.

Если положить $A=1$, то получаем

Следствие 4.3. Пусть подгруппа $\Delta_\pi(G)$ обладает свойством C_π . Тогда $\Delta_\pi(G)/O_\pi(G) = \Delta(G/O_\pi(G))$.

В частности, $\Delta_\pi(G)/O_\pi(G)$ нильпотентна.

Теорема 5. Пусть p и q – простые различные числа. Тогда для любой группы G с группой операторов A такой, что $(|G|, |A|) = 1$ справедливо равенство

$$\Delta_p(G, A) \cap \Delta_q(G, A) = \Delta(G, A).$$

Доказательство. Очевидно $\Delta_p(G, A) \cap \Delta_q(G, A) \supseteq \Delta(G, A)$. Пусть $K = \Delta_p(G, A) \cap \Delta_q(G, A)$ и $\Delta(G, A) \subset K$. Тогда в G найдется, абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа M такая, что $G = MK$. Если $|G:M|$ не делится на $t \in \{p, q\}$, то $\Delta_t(G, A) \subseteq M$. Следовательно, $KM = M$, что невозможно. Значит, индекс M в G делится одновременно на p и q .

Пусть $O_p(G) = 1$. Тогда ввиду теоремы 4 имеем равенство $\Delta_p(G, A) = \Delta(G, A)$. Поэтому $K \subseteq M$, что противоречит определению подгруппы K . Значит, $O_p(G) \neq 1$. Если $O_p(G) = M = G$, то $|G:M|$ делится на p , но не делится на q . Противоречие. Поэтому $O_p(G) \subsetneq M$. На основании следствия 4.2 имеем $\Delta_p(G, A)/O_p(G) = \Delta_p(G/O_p(G), A) \subseteq M/O_p(G)$. Отсюда следует, что $\Delta_p(G, A) \subseteq M$. Снова пришли к противоречию. Таким образом, остается заключить, что $\Delta_p(G, A) \cap \Delta_q(G, A) = \Delta(G, A)$. Теорема доказана.

При $A=1$ из теоремы 5 получаем следующий известный результат (см. [1]).

Следствие. Для любой группы G выполняется равенство $\Delta_p(G) \cap \Delta_q(G) = \Delta(G)$, в частности, это пересечение нильпотентно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Селькин М.В.** Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Мн., 1997. – 144 с.
2. **Gaschütz W.** Über die Φ -Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z., 1953. Bd. 58. S. 160–170.
3. **Шлык В.В.** О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах // Матем. заметки, 1973. Т. 14, № 3. С. 429–439.
4. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М., 1978. – 272 с.
5. **Gorenstein D.** Finite groups. New York: Harper and Row, 1968. – 572 p.
6. **Thompson J.G.** Normal p -complements for finite groups // J. Algebra, 1964. V. 1. P. 43–46.

S U M M A R Y

The properties of the intersections of cores of some abnormal maximal A -admissible subgroups of a group G are studied.

Поступила в редакцию 15.04.2003