



УДК 512.542

Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич

Об одном обобщении подгруппы Фраттини в конечных разрешимых группах

Все рассматриваемые нами группы конечны. В обозначениях и определениях мы следуем монографии [1]. Исследование пересечений максимальных подгрупп восходит к работе Фраттини [2]. Полученные им результаты в дальнейшем развивались многочисленными авторами. В частности, В. Гашюцом [3] исследовалось пересечение $\Delta(G)$ всех абнормальных максимальных подгрупп группы G . В работе Д. Бейдлемана и Т. Сео [4] изучалось поведение нормальных подгрупп в обобщенно фраттиниевых расширениях. В статье исследуется строение подгруппы, близкой по своим свойствам к подгруппе Гашюца $\Delta(G)$.

Заметим, что в разрешимой группе G существуют и сопряжены холловские p' -подгруппы, для любого $p \in \pi(G)$.

Определение. Пусть G – разрешимая группа. Нормальную подгруппу H группы G назовем обобщенной подгруппой Фраттини, если $G = N_G(K)$ для каждой нормальной подгруппы L из G и каждой p' -холловой подгруппы K из L такой, что $G = HN_G(K)$.

Напомним [5], что через $F_p(G)$ обозначают p -нильпотентный радикал группы G , то есть произведение всех нормальных p -нильпотентных подгрупп группы G .

Подгруппу H называют абнормальной, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$.

Лемма 1. Пусть $K \triangleleft G$ и пусть в K существуют и сопряжены p' -холловы подгруппы. Тогда, если P – p' -холлова подгруппа из K и $N_G(P) \neq G$, то $N_G(P)$ – абнормальная подгруппа группы G .

Доказательство. Пусть $x \in G$. По лемме Фраттини $G = KN_G(P)$. Тогда $x = kh$, где $k \in K$, $h \in N_G(P)$. Тогда $\langle N_G(P), (N_G(P))^{kh} \rangle = \langle N_G(P), (N_G(P))^k \rangle$. В силу того, что $N_K(P) \subseteq N_G(P)$ и $N_K(P)$ – абнормальна в K , получаем $k \in \langle N_K(P), (N_K(P))^k \rangle \subseteq \langle N_G(P), (N_G(P))^k \rangle$. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть H – обобщенная подгруппа Фраттини группы G . Тогда

- 1) H – нильпотентная подгруппа группы G ;

- 2) любая нормальная подгруппа, содержащаяся в обобщенной подгруппе Фраттини, является обобщенной подгруппой Фраттини;
- 3) если $\Delta(G) \neq G$, то $\Delta(G)$ – обобщенная подгруппа Фраттини группы G ;
- 4) $H\Phi(G)$ – обобщенная подгруппа Фраттини группы G ;
- 5) $HZ(G)$ – обобщенная подгруппа Фраттини группы G .

Доказательство. Пусть $p \in \pi(H)$ и K – p' -холлова подгруппа подгруппы H . По обобщенной лемме Фраттини $G = N_G(K)H$. Так как H – обобщенная подгруппа Фраттини группы G , то $G = N_G(K)$. Итак, любая p' -холлова подгруппа из H нормальна в ней. Отсюда заключаем, что подгруппа H p -нильпотентна для любого простого числа $p \in \pi(H)$, следовательно H – нильпотентная подгруппа группы G .

Пусть Q – нормальная подгруппа, содержащаяся в обобщенной подгруппе Фраттини H . Рассмотрим для каждой нормальной подгруппы L из G такие p' -холловы подгруппы K из L , что $G = QN_G(K)$. Из того, что $Q \subseteq H$, следует, что $G = HN_G(K)$ и $G = N_G(K)$. Следовательно, Q – обобщенная подгруппа Фраттини группы G .

Рассмотрим для каждой нормальной подгруппы L из G такие p' -холловы подгруппы K из L , что $G = \Delta(G)N_G(K)$. По лемме 1 $N_G(K)$ – абнормальная подгруппа группы G , следовательно, $N_G(K)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной подгруппе T . Тогда, так как $T \supseteq \Delta(G)$, то $G = T$. Из полученного противоречия получаем, что $G = N_G(K)$, а это означает, что $\Delta(G)$ – обобщенная подгруппа Фраттини группы G .

Следующие утверждения выполняются в силу того, что $\Phi(G)$ состоит из необразующих элементов, а $Z(G)$ содержится в нормализаторе каждой подгруппы группы G . Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть K – обобщенная подгруппа Фраттини. Если N – нормальная подгруппа группы G и N/K – p -нильпотентна, то N p -нильпотентная подгруппа группы G .

Доказательство. Пусть N/K имеет нормальную S_p -подгруппу H/K . Так как K – обобщенная подгруппа Фраттини, то K нильпотентна. Нетрудно заметить, что S_p -подгруппа R из K является S_p -подгруппой в H . По теореме Шура–Цассенхауза H содержит S_p -подгруппу S и любые две такие подгруппы сопряжены в H . По обобщенной лемме Фраттини $G = N_G(S)H$ с учетом того, что $H = SR$, получаем $G = N_G(S)R$. Тогда по свойству 2, R – обобщенная подгруппа Фраттини. Следовательно, $G = N_G(S)$, а значит, S нормальна в G .

Следствие 1. Пусть K – обобщенная подгруппа Фраттини, тогда $F_p(N/K) = F_p(N)/K$.

Теорема 3. Пусть F – локальная формация и K – обобщенная подгруппа Фраттини группы G . Если N – нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap K \in F$, тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $N_1 \in F$;
- 2) $\pi(N_2) \cap \pi(F) = \emptyset$;
- 3) $N_2 \subseteq K$.

Доказательство. Пусть $D = N \cap K$, $\omega = \pi(F)$. Так как N/D является ω -группой, то по лемме 1 подгруппа N представима в виде $N = N_1 \times N_2$, где N_1 – S_ω -подгруппа из N . Так как $N_2 \subseteq K$, то $N/DN_1/D_1 \in F$, где $D_1 = N_1 \cap K$. Пусть $p \in \omega$. Так как $N_1/D_1 \in F$, то, используя леммы 1 и 2, получаем

$$(N_1/D_1)/F_p(N_1/D_1) = N_1/D_1/F_p(N_1)/D_1N_1/F_p(N_1) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 4.5 из [5] подгруппа N_1 входит в F . Теорема доказана.

Следствие 3.1. Пусть F – локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, K – обобщенная подгруппа Фраттини группы G . Если N – нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap K \in F$, то $N \in F$.

Следствие 3.2. Пусть F – локальная формация. Если N – нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G) \in F$, тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $N_1 \in F$;
- 2) $\pi(N_2) \cap \pi(F) = \emptyset$;
- 3) $N_2 \subseteq \Delta(G)$.

Следствие 3.3. Пусть F – локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G) \in F$, то $N \in F$.

Если в качестве обобщенной подгруппы Фраттини взять подгруппу Фраттини $\Phi(G)$, то из теоремы 3 получаем известный результат из работы [5].

Теорема 4. Пусть K – обобщенная подгруппа Фраттини и M – нормальная подгруппа группы G , содержащая K . Тогда M/K является обобщенной подгруппой Фраттини в G/K в том и только в том случае, когда M обобщенная подгруппа Фраттини группы G .

Доказательство. Допустим, что M – обобщенная подгруппа Фраттини группы G . Пусть L/K нормальная подгруппа из G/K и пусть H – p' -холлова подгруппа нормальной подгруппы L из G такая, что $G/K = (M/K)N_{G/K}(KH/K)$, тогда $G = MN_G(KH)$. Пусть $g = tx$, где $t \in M$ и $x \in N_G(KH)$, тогда $H^x \subseteq KH$. Так как L – нормальная подгруппа группы G , то H и H^x – p' -холловы подгруппы в подгруппе $L \cap KH$. По-

этому существует элемент y из $L \cap KH$ такой, что $H^{xy} = H$, следовательно, $xy \in N_G(H)$. Тогда $gy = m(xy)$ содержится в $MN_G(H)$. Так как $MN_G(H)$ содержит KH . Отсюда следует, что $y \in MN_G(H)$, следовательно, $g \in MN_G(H)$. Мы показали, что $G = MN_G(H)$. В силу того, что M – обобщенная подгруппа Фраттини группы G , следует, что $G = N_G(H)$. Отсюда заключаем, что M/K – обобщенная подгруппа Фраттини группы G/K .

Предположим, что M/K – обобщенная подгруппа Фраттини группы G/K . Пусть L – нормальная подгруппа группы G и пусть H – p' -холлова подгруппа нормальной подгруппы L из G такая, что $G = MN_G(H)$. Тогда $G/K = (M/K)N_{G/K}(KH/K)$, следовательно, так как KH/K – p' -холлова подгруппа нормальной подгруппы KL/K из G/K , то $G/K = N_{G/K}(KH/K)$. Отсюда получаем, что KH – нормальная подгруппа группы G . Пусть H_1 – p' -холлова подгруппа из KH , содержащая H . По обобщенной лемме Фраттини $G = KHN_G(H_1) = KN_G(H_1)$, следовательно, $G = N_G(H_1)$, а значит $H_1 \subseteq F_p(G)$.

Из теоремы 3 следует, что M – нильпотентная подгруппа группы G . Тогда MH – нильпотентная подгруппа. Из того, что $G = MN_G(H)$, следует, что MH – нормальная p -нильпотентная подгруппа группы G .

Покажем, что $N_G(H)$ содержит MH . Пусть H_2 – p' -холлова подгруппа подгруппы MH . Тогда H_2 – нормальна в G , следовательно, $H \subseteq H_2$. Пусть H_3 – p' -холлова подгруппа группы G , содержащая H_2 . Так как L – нормальная подгруппа группы G , $L \cap H_3 = H$ и $N_G(H_3) \subseteq N_G(H)$. Из этого следует, что $H_2 \subseteq N_G(H)$. Так как MH – нормальная p -нильпотентная подгруппа группы G , то $MH \subseteq N_G(H)$. Мы показали, что $G = N_G(H)$, следовательно, M – обобщенная подгруппа группы G .

ЛИТЕРАТУРА

1. **Селькин, М.В.** Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 144 с.
2. **Frattini, G.** Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.
3. **Gaschütz, W.** Über die Φ -Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Bd. 58. – S. 160–170.
4. **Beidleman, J.C.** Generalized Frattini subgroups of finite groups / J.C. Beidleman, T.K. Seo // Pacific journal of mathematics. – 1967. – Vol. 23, № 3. – P. 441–450.
5. **Шеметков, Л.А.** Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 267 с.

S U M M A R Y

The structure of generalized Frattini subgroup of finite soluble groups is investigated.

Поступила в редакцию 23.12.2007