Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 3

УДК 517.948.33 *МАТЕМАТИКА*

Г. М. МАГОМЕДОВ

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С НЕПОДВИЖНОЙ СИНГУЛЯРНОСТЬЮ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 12 VI 1972)

В настоящей заметке приводятся результаты исследования линейных и нелинейных операторов и уравнений в пространствах Гёльдера H_δ

$$K_1u(t)\equiv\int_\Gamma\frac{K(t,\tau)}{\tau-t_0}u(\tau)\,d\tau,\quad u+\lambda K_1u=\varphi;\tag{1}$$

$$K_2u(t)\equiv\int_\Gamma\frac{K(t,\tau,u(\tau))}{\tau-t_0}\,d\tau,\quad u+\lambda K_2u=\psi.\tag{2}$$

Область интегрирования Γ — гладкая [1] линия конечной длины на комплексной плоскости; t_0 — фиксированная точка Γ, не являющаяся граничной, если последняя разомкнута, а λ — произвольный комплексный параметр. Интеграл понимается в смысле главного значения Коши. Уравнение типа (1) Пикар [2] назвал уравнением Фредгольма третьего рода. Решение уравнения типа (1) Пикар находит как предел решений уравнений Фредгольма второго рода. Такой же подход к задаче и в работе [3], посвященной уравнению типа (1).

Ниже, при менее жестких, чем в этих работах, ограничениях на $K(t,\tau)$ и Γ доказывается полная непрерывность оператора (1) в пространствах H_δ, а также, что уравнение (1) является уравнением фредгольмовского типа второго рода.

В ряде работ, в частности [4], исследуются нелинейные уравнения типа (2) при малых $|\lambda|$.

Мы доказываем, что оператор (2) является вполне непрерывным в пространствах H_δ и существование решения уравнения (2) при произвольном λ.

Следует отметить, что единственная в этом роде работа [5], посвященная доказательству теоремы существования решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения при произвольном λ, содержит существенную ошибку в своей главной части (см. (27) и дальше).

Будем считать, что $u(t)\in H_\delta$ на Γ, если

$$\|u\|_\delta=\sup_{t_1,t_2\in\Gamma}\frac{|u(t_2)-u(t_1)|}{|t_2-t_1|^\delta}<\infty.\tag{a}$$

В монографии Н. И. Мусхелишвили [1] доказывается, что пространство H_δ с нормой

$$\|u\|=\|u\|_c+\|u\|_\delta$$

является полным.

Лемма 1. *Всякое ограниченное в пространстве H_δ множество является компактным в пространстве H_γ, если $0<\gamma<\delta$.*

По теореме Арцеля, из любой ограниченной в H_δ последовательности $\{u_n\}$, можно выделить равномерно сходящуюся к некоторой непрерывной функции $u_0(t)$ последовательность $\{u_{nk}\}$. Можно доказать, что и $u(t) \in H_\delta$, а на основе этого и сходимость последовательности $\{u_{nk}\}$ к $u_0(t)$ в смысле H_γ.

Лемма 2. *Пусть функция $f(t, \tau)$ удовлетворяет условиям*

$$|f(t_2, \tau_2) - f(t_1, \tau_1)| \leqslant A_1 |t_2 - t_1|^\alpha + A_2 |\tau_2 - \tau_1|^\beta \tag{b}$$

на $\Gamma \times \Gamma$ и t_0 — фиксированная внутренняя точка Γ.

Тогда при произвольном $0 < \varepsilon < \alpha$ интеграл

$$v(t) = \int_\Gamma \frac{f(t, \tau)}{\tau - t_0} d\tau \in H_{\alpha - \varepsilon} \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Доказательство производится непосредственно:

$$|v(t_2) - v(t_1) \leqslant 2^\varepsilon A_2^\varepsilon \int_\Gamma |f(t_2, \tau) - f(t, \tau) - f(t_2, t_0) + f(t_1, t_0)| |\tau - t_0|^{\varepsilon \alpha - 1} |d\tau| +$$
$$+ |f(t_2, t_0) - f(t_1, t_0)| \left| \int_\Gamma \frac{d\tau}{\tau - t_0} \right| \leqslant A |t_2 - t_1|^{\alpha - \varepsilon}. \tag{c}$$

Коэффициент A зависит лишь от A_i, β, ε, Γ и от расположения t_0 на Γ, если последняя разомкнута.

Замечание 1. В монографии ([1]) показано, что $v(t) \in H_\beta$, если $\beta < \alpha$. В лемме 2 степень гладкости $v(t)$ вовсе не зависит от β, лишь бы $\beta > 0$. Это и существенно в дальнейшем.

Из леммы 2 и леммы 1 общей теории вполне непрерывных операторов 6 следует

Теорема 1. *Если $K(t, \tau)$ удовлетворяет условию*

$$|K(t_2, \tau_2) - K(t_1, \tau_1)| \leqslant B_1 |t_2 - t_1|^\alpha + B_2 |\tau_2 - \tau_1|^\beta, \tag{d}$$

то оператор $K_1 u(t)$ является вполне непрерывным в H_γ при $0 < \gamma < \alpha$ и для уравнения (1) имеет место альтернатива Фредгольма; спектр оператора (1) является дискретным.

Лемма 3. *Если $f(t, \tau)$ удовлетворяет* (b) *и $\|f(t, \tau)\|_c = M$, то*

$$\|v\| \leqslant \bar{A} (M^{1-\varepsilon} A_2^\varepsilon + A_1^{\delta/\alpha} A_1^{1-\delta/\alpha} + A_1),$$

где $\|v\|$ — норма v в H_δ; δ, ε произвольные, лишь бы $0 < \delta < \alpha$; $0 < \varepsilon < 1$, коэффициент $\bar{A}$ зависит от α, β.

Сперва оценим

$$\|u\|_c \leqslant \sup \left(A_2^\varepsilon \int_\Gamma |f(t, \tau) - f(t, t_0)|^{1-\varepsilon} |\tau - t_0|^\varepsilon |d\tau| + |f(t, t)| \left| \int_\Gamma \frac{d\tau}{\tau - \tau_0} \right| \right) \leqslant$$
$$\leqslant M^{1-\varepsilon} A_2^\varepsilon \bar{A}_2 + M A_1.$$

Оценка $\|v\|_\delta$ дана в лемме 2. Надо только выписать значение коэффициента A.

Теорема 2. *Если функция $K(t, \tau, u)$, определенная по t и τ на $\Gamma \times \Gamma$, а по $w +$ на всей комплексной плоскости, удовлетворет условиям*

$$|K(t, \tau, u)| < c_1 |u|^{1-\varepsilon} + c_2, \tag{e}$$

$$|K(t_2, \tau_2, u_2) - K(t_1, \tau_1, u_1)| \leqslant$$
$$\leqslant (D_1 |u|^{1-\varepsilon} + D_2) |t_2 - t_1|^\alpha + (E_1 |u| + E_2) |\tau_2 - \tau_1|^\beta + c_\gamma |u_2 - u_1|^\gamma, \tag{g}$$

где α, β, γ, ε, $1 - \varepsilon$ и все коэффициенты положительны, то оператор $K_2 u$ является вполне непрерывным в H_δ, $0 < \delta < \alpha$, и уравнение (2) имеет решение в H_δ при произвольном λ.

Обозначим $f_u(t, \tau) \equiv K(t, \tau, u(\tau))$. Последовательно используя леммы 2 и 1, получаем, что оператор K_2u является компактным в H_δ.

При помощи леммы 3 устанавливается непрерывность оператора в H_δ. Из условий (e) и (g) и леммы получаем оценку нормы $\|K_2u\|$ в смысле H_δ:

$$\|K_2u\| \leqslant N_1 \|u\|_c^{\mu_1} \|u\|_\delta^{\mu_2} + N_2 \|u\|_c^{\mu_3} + N_3 \|u_\delta\|^{\mu_4} + N_4.$$

Все постоянные N_i; μ_i, $i = 1, \ldots, 4$, не зависят от $u(t)$ и, кроме того, $0 < \mu_1 + \mu_2$, $\mu_i < 1$.

Тогда

$$\lim_{\|u\| \to 0} \frac{\|K_2u\|}{\|u\|} = 0.$$

Из последнего следует, что при любом фиксированном λ оператор λK_2u образует достаточно большого радиуса шар пространства H_δ в себя. Остается ссылаться на принцип Шаудера о существовании неподвижной точки.

Замечание 2. Как и в работе ([4]), можно показать сходимость последовательных приближений к единственному в H_δ решению уравнения (2) при достаточно малых λ; причем в отличие от работы ([4]) можно показать сходимость этих последовательных приближений в смысле H_δ.

Замечание 3. Все результаты работы останутся верны, если понятие интеграла в смысле главного значения Коши заменить более общим понятием интеграла в смысле Пикара ([2]).

Таким же образом, не влияя на общие результаты, ядро интеграла $(\tau - t_0)^{-1}$ можно заменить на $\prod_{k=1}^{n} (\tau - t_k)^{-1}$, если t_k — различные внутренние точки Г.

Замечание 4. Гладкость линии Г не является существенной в работе. Достаточно, чтобы Г была спрямляемой и чтобы однозначно определялся интеграл $\int \frac{d\tau}{\tau - t_0}$ в соответствующем смысле.

Замечание 5. Теоремы 1 и 2 имеют место также для оператора и уравнения

$$K_3u(t) \equiv \int_E \left[\int_\Gamma \frac{K(t, \tau_1, \tau_2, u(\tau_i))}{\tau_1 - \tau_2} d\tau_1 \right] d\tau_2, \ i = 1, 2; \quad u + \lambda K_3 u = f \tag{3}$$

при соответствующем $K(t, \tau_1, \tau_2, u)$.

Здесь Г — спрямляемая линия, для которой определяется интеграл $\int \frac{d\tau}{\tau - t}$ в смысле главного значения Коши в каждой точке $t \in \Gamma$, E — произвольное измеримое множество, в частности, может быть $\Gamma \in E$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968. [2] E. Picard, Ann. Ec. norm., (3), 28 (1911). [3] Т. А. Хволес, Сообщ. АН ГрузССР, 2, № 5 (1941). [4] Т. А. Эбоноидзе, Тр. Вычислит. центра АН ГрузССР, 1, 57 (1960). [5] Р. Денчев, Объедин. инст. ядерн. исслед., Лаб. вычилит. техн. и автом., № 5—4495, Дубна, 1969. [6] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959.