Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 5

УДК 517.55 *МАТЕМАТИКА*

Л. А. АЙЗЕНБЕРГ

О $\bar\partial$-ЗАМКНУТЫХ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМАХ ТИПА $(p,\ n-1)$ В ПРОСТРАНСТВЕ C^n

(Представлено академиком В. С. Владимировым 26 VI 1972)

Обозначим $C_{p,q}^{(k)}(D)$ класс внешних дифференциальных форм типа (p,q), с k раз непрерывно дифференцируемыми в области $D\subset C^n$ коэффициентами. Ниже будет показано, что $\bar\partial$-замкнутые формы из $C_{p,n-1}^{(k)}(D)$, $0\leqslant p\leqslant n$, во-первых, являются аналогами для пространства C^n голоморфных функций одного комплексного переменного (т. е. сохраняют ряд важных свойств этих функций, которых нет, например, у голоморфных функций n комплексных переменных при $n>1$); во-вторых, двойственны при интегрировании по границе ∂D области D голоморфным функциям (или формам) n комплексных переменных. Отметим, что при $n=1$ эти формы превращаются в голоморфные функции или голоморфные формы.

1. Пусть $z=(z_1,\ldots,z_n)$, $\zeta=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$, $|z|=(|z_1|^2+\ldots+|z_n|^2)^{1/2}$,

$$\omega_{n-1}(\zeta,z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\bar\zeta_k-\bar z_k}{|\zeta-z|^{2n}}d\bar z_1\wedge\ldots[k]\ldots\wedge d\bar z_n,$$

где $[k]$ означает, что дифференциал с номером k пропущен;

$$\omega_{n-2}(\zeta,z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}(-1)^{\delta+k-1}\frac{\bar\zeta_k-\bar z_k}{|\zeta-z|^{2n}}d\bar\zeta_j\, d\bar z_1\wedge\ldots[k,j]\ldots\wedge d\bar z_n;$$

положим $\omega_{n-2}=0$, если $n=1$;

$$\mu_p(\zeta,z)=\sum_{i_1<\ldots<i_p}(-1)^{\sigma}d\zeta_1\wedge\ldots[i_1,\ldots,i_p]\ldots\wedge d\zeta_n\, dz_{i_1}\wedge\ldots\wedge dz_{i_p},$$

где $\delta=n-j$ при $k<j$, $\delta=n-j-1$ при $k>j$, $\sigma=i_1+\ldots+i_p+{}^1/_2p(p+1)$,

$$\mu_0=d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n;\quad u_{p,q}(\zeta,z)=(-1)^{p(n-q-1)}\omega_q\wedge\mu_p;$$
$$q=n-1,\ n-2.$$

Пусть D — ограниченная область C^n с гладкой границей ∂D, форма $\gamma\in C_{p,n-1}^{(1)}(\bar D)$, $0\leqslant p\leqslant n$; нам потребуется следующая формула:

$$\int_{\partial D}\gamma(\zeta)\wedge u_{p,n-1}-\int_{D}\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge u_{p,n-1}-\bar\partial_z\int_{D}\gamma(\zeta)\wedge u_{p,n-2}=$$
$$=\begin{cases}\gamma(z), & \text{если } z\in D,\\ 0, & \text{если } z\in C^n\setminus\bar D.\end{cases}\tag{1}$$

Формула (1) — частный случай формулы Мартинелли — Бохнера — Коппельмана ([1]), обобщенной в ([2]). Обозначим $C_{p,q}^{(k)}(\partial D)$ класс всех ограничений на ∂D форм из $C_{p,q}^{(k)}(U)$, где U — любая окрестность ∂D; $B_{p,n-1}(D)$ — класс $\bar\partial$-замкнутых форм вида

$$\alpha(z)=$$
$$=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\partial G_{i_1\ldots i_p}(\bar z,z)}{\partial z_k}d\bar z_1\wedge\ldots[k]\ldots\wedge d\bar z_n\wedge dz_{i_1}\wedge\ldots\wedge dz_{i_p},$$

где функции $G_{i_1\dots i_p}$ гармоничны в D: $\Delta G_{i_1\dots i_p} = 0$. Пусть $\beta \in C^{1()}_{p,\, n-1}\ (\partial D)$; рассмотрим интеграл типа первого интеграла в (1):

$$\int\limits_{\partial D} \beta(\zeta) \wedge u_{p,\, n-1} = \begin{cases} \alpha_+(z), & \text{если } z \in D, \\ \alpha_-(z), & \text{если } z \in C^n / \bar{D}, \end{cases} \tag{2}$$

являющийся обобщением интеграла типа Коши ($n = 1$, $p = 0$).

Теорема 1 (Краевая задача о скачке). *Если ∂D класса $C^{(k+1)}$, $k \geqslant 1$, $\beta \in C^{(k-1)}_{p,\, n-1}(\partial D)$, то $\alpha_+(z) \in C^{(k-1)}_{p,\, n-1}(\bar{D}) \cap B_{p,\, n-1}(D)$, $\alpha_-(z) \in C^{(k-1)}_{p,\, n-1}(C^n \setminus D) \cap \cap B_{p,\, n-1}(C^n \setminus \bar{D})$, $\alpha_-(z) = O(|z|^{1-2n})$ при $|z| \to \infty$, для $z \in \partial D$ справедливо равенство* *

$$\beta(z) = \alpha_+(z) - \alpha_-(z). \tag{3}$$

Приведем схему доказательства. Непосредственно из вида ядра $u_{p,\, n-1}$ вытекает, что $\alpha_+(z) \in B_{p,\, n-1}(D)$, $\alpha_-(z) = B_{p,\, n-1}(C^n \setminus \bar{D})$, $\alpha_-(z) = O(|z|^{1-2n})$ при $|z| \to \infty$. Коэффициенты форм α_+ и α_- являются, как легко заметить в (2), производными от соответствующего потенциала простого слоя и, следовательно, принадлежат классу $C^{(k-1)}$ в замкнутых областях (что можно показать аналогично ([3]), стр. 124). По условию, $\beta \in C^{(k-1)}_{p,\, n-1}(U)$, где U — некоторая окрестность ∂D. Пусть V — меньшая окрестность ($\bar{V} \subset U$, $V \supset \partial D$) с гладкой границей, $V_+ = V \cap D$, $V_- = V \setminus \bar{D}$, $(\partial V)_- = (\partial V) \cap D$, $(\partial V)_- = (\partial V) \setminus (\partial V)_+$.

Из сопоставления формул (1) и (2) получаем для $z' \in D$

$$\alpha_+(z') = \int\limits_{(\partial V)_-} \beta(\zeta) \wedge u_{p,\, n-1}(\zeta, z') - \int\limits_{V_-} \bar{\partial}\beta(\zeta) \wedge u_{p,\, n-1} - \bar{\partial}_z \int\limits_{V_-} \beta(\zeta) \wedge u_{p,\, n-2} \tag{4}$$

и для $z'' \in (C^n \setminus \bar{D})$

$$\alpha_-(z'') = - \int\limits_{(\partial V)_+} \beta(\zeta) \wedge u_{p,\, n-1}(\zeta, z'') + \int\limits_{V_+} \bar{\partial}\beta(\zeta) \wedge u_{p,\, n-1} + \bar{\partial}_z \int\limits_{V_+} \beta(\zeta) \wedge u_{p,n-2}. \tag{5}$$

Теперь после вычитания (5) из (4) и предельного перехода при $z' \to \to z \in \partial D$, $z'' \to z$ (возможность которого можно обосновать) приходим к (3).

Эта теорема для $p = n$ заявлена в ([4]). Локальные аналоги формулы (3) см., например, в ([5]).

Теорему 1 можно усилить, если вместо гладкости коэффициентов формы β потребовать выполнения для них условия Гёльдера. Отметим, что формула (3) для $p = n$ и предельных значений по нормали к ∂D содержится в ([6]), однако доказательство в ([6]) неверно.

Из формулы (1) и теоремы 1 вытекает

Следствие. *Если $\partial D \in C^{(k+1)}$, $k \geqslant 1$, $\beta \in C^{(k)}_{p,n-1}(\bar{D})$, $\overline{\partial}\beta = 0$ в D, то существует разложение $\beta = \alpha + \partial\gamma$, где $\alpha \in C^{(k-1)}_{p,n-1}(\bar{D}) \cap B_{p,\, n-1}(D)$, а $\gamma \in \in C^{(k)}_{p,n-2}(D)$. Здесь $\gamma = 0$ при $n = 1$.*

Теорема 2 (Разделение особенностей для форм). Пусть ** $D = D_1 \cap D_2$, $\alpha \in C_{n-1)}(D)$, $\overline{\partial}\alpha = 0$. *Тогда α можно представить в виде $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, где $\alpha_i \in C^{(1)}_{p,n-1}(D_i)$, $\overline{\partial}\alpha_i = 0$, $i = 1, 2$.*

Теорема 3 (Об областях существования форм). *Для всякой области $D \subset C^n$ и любого p, $0 \leqslant p \leqslant n$, существует форма $\alpha \in B_{p,\, n-1}(D)$, не продолжаемая через границу $\overline{\partial}D$ как $\bar{\partial}$-замкнутая гладкая форма.*

Теоремы 1—3 и теорема об аппроксимации $\bar{\partial}$-замкнутых форм типа $(n, n-1)$ из ([7]) (ее легко распространить на формы типа $(p, n-1)$ пока-

---

* Если $p = n$, то можно считать, что β — форма степени $2n - 1$ и класса $C^{(k)}$ на ∂D. Условие $\alpha_- = O(|z|^{1-2n})$ означает, что каждый коэффициент формы α_- есть $O(|z|^{1-2n})$.

** В теоремах 2, 3 гладкость ∂D и ограниченность D не предполагаются.

зывают, что некоторые важные факты о голоморфных функциях при $n=1$ имеют аналоги для $\bar\partial$-замкнутых форм типа $(p, n-1)$ при $n>1$. Заметим, что эти результаты не верны для $\bar\partial$-замкнутых форм типа (p, q), если $q<n-1$.

2. Пусть D — ограниченная область в C^n, $n>1$, с гладкой границей, $A(\bar D)$ (соответственно $A_c(D)$ — алгебра функций, голоморфных на $\bar D$ (соответственно голоморфных в D и непрерывных на $\bar D$). Ставится задача описания внешних дифференциальных форм α степени $2n-1$ класса $C^{(1)}$ на ∂D, принадлежащих $A^\perp(\bar D)$ (или $A_c^\perp(D)$), т. е. таких, что для всякой $f\in A(\bar D)$ (соответственно $f\in A_c(D)$) справедливо равенство $\int\limits_{\partial D} f\alpha=0$.

Более общей является задача об описании форм $\alpha\in C^{(1)}_{p,n-1}(D)\cap$ $\cap A^\perp_{n-p,0}(\bar D)$, где $A_{n-p,0}(\bar D)$ — множество голоморфных в $\bar D$ форм типа $(n-p, 0)$, $0\leqslant p\leqslant n$.

Из результатов ([8]) вытекает, что $\bar\partial$-замкнутые формы из $C^{(\infty)}_{n,n-1}(\bar D)$ слабо плотны (в смысле $C(\partial D)$-топологии пространства $C^*(\partial D)$, где $C(\partial D)$ — пространство непрерывных на ∂D функций) во множестве форм (и даже мер) из $A_c^\perp(D)$. Из ([7]) следует аналогичное утверждение для $\bar\partial$-точных на ∂D форм типа $(n, n-1)$, если ∂D связна.

Некоторый шаг в решении задачи об $A_c^\perp(D)$ был сделан в ([9]). Далее в ([10]) показано, что $\alpha\in A^\perp(\bar D)$, где D — строго псевдовыпуклая область, тогда и только тогда, когда α продолжается в $\bar D$ как $\bar\partial$-замкнутая форма типа $(n, n-1)$. Этот результат естественно дополняет результат работы ([11]), в которой изучался вопрос о $\bar\partial$-замкнутом продолжении форм типа (p, q) с ∂D на $\bar D$ при $q<n-1$.

Если компакт $K=\bigcap\limits_m D_m$, $\bar D_{m+1}\subset D_m$, области D_m имеют однолистные оболочки голоморфности $H(D_m)$, то будем говорить, что K имеет однолистную оболочку голоморфности, и определим $H(K)$ как $\bigcap\limits_m H(D_m)$. Так построенная $H(K)$ не зависит от выбора D_m и сохраняет ряд свойств оболочки голоморфности области ([12]).

Введем класс $E(K)$; 1) $\bar\partial$-точных форм в $C^n\setminus K$, если $n=2$; 2) форм, являющихся $\bar\partial$-точными в $C^n\setminus\bar D$ для всякой области $D\supset K$, если $n>2$.

Теорема 4 (Описание форм, ортогональных голоморфным). *Пусть ∂D класса $C^{(k+1)}$, $k\geqslant 1$, $\bar D$ имеет однолистную оболочку голоморфности, $\alpha\in C^{(k)}_{p,n-1}(\partial D)$.*

Тогда $\alpha\in A^\perp_{n-p,0}(\bar D)$ тогда и только тогда, когда существуют форма $\alpha_+\in C^{(k-1)}_{p,n-1}(\bar D)\cap B_{p,n-1}(D)$ и форма $\alpha_-\in C^{(k-1)}_{p,n-1}(C^n\setminus D)\cap B_{p,n-1}(C^n\setminus\bar D)\cap$ $\cap B_{p,n-1}(C^n\setminus\bar D)\cap E(H(\bar D))$, $\alpha_-(z)=O(|z|^{1-2n})$ при $|z|\to\infty$, такие, что для $z\in\partial D$ справедливо

$$\alpha(z)=\alpha_+(z)-\alpha_-(z). \tag{6}$$

Доказательство. Достаточность. Если $\beta\in A_{n-p,0}(\bar D)$, то существует ограниченная область Q с гладкой границей, $Q\supset H(\bar D)$, такая, что $\beta\in A_{n-p,0}(\bar Q)$. Пусть область $Q'\supset H(\bar D)$, $\bar Q'\subset Q$, по условию $\alpha_-=\bar\partial\gamma$ в $C^n\setminus\bar Q'$. Далее, применяя формулу Стокса, получаем

$$\int\limits_{\partial D}\beta\wedge\alpha=\int\limits_{\partial D}\beta\wedge\alpha_+-\int\limits_{\partial D}\beta\wedge\alpha_-=(-1)^{n-p}\int\limits_{D}\beta\wedge\bar\partial\alpha_+-\int\limits_{\partial Q}\beta\wedge\bar\partial\gamma=$$
$$=(-1)^{n-p-1}\times\int\limits_{\partial Q}d(\beta\wedge\gamma)=0.$$

Необходимость. Представим α в виде (6), используя теорему 1. Очевидно, $\alpha_+\in A^\perp_{n-p,0}(\bar D)$, поэтому и $\alpha_-\in A^\perp_{n-p,0}(\bar D)$. Нужно показать, что $\alpha_- \in E(H(\bar{D}))$. Представим $H(\bar{D}) = \bigcap\limits_m Q_m$, $\bar{Q}_{m+1} \subset Q_m$, Q_m — строго псевдовыпуклые области, границы ∂Q_m принадлежат классу $C^{(\infty)}$. Можно показать, что из ([10]) следует существование таких форм $\gamma_m \in C^{\infty}_{p,\, n-2}(\bar{Q}_m)$, что $\bar{\partial}\gamma_m|_{\partial Q_m} = \alpha_-$. Представим α_- в области $C^n \setminus \bar{Q}_m$ по формуле (1). Это возможно, потому что $\alpha_-(z) = O(|z|^{1-2n})$ при $|z| \to \infty$. Второе слагаемое в (1) исчезнет, так как $\bar{\partial}\alpha_- = 0$, третье слагаемое $\bar{\partial}$-точно, а первое слагаемое преобразуем для $z \in C^n \setminus \bar{Q}_m$ так:

$$- \int\limits_{\partial Q_m} \alpha_-(\zeta) \wedge u_{p,\, n-1}(\zeta, z) = - \int\limits_{\partial Q_m} \bar{\partial}\gamma_m(\zeta) \wedge u_{p,\, n-1} =$$

$$= (-1)^{p+n} \int\limits_{\partial Q_m} \gamma_m \wedge \bar{\partial}_\zeta u_{p,\, n-1} = (-1)^{p+1} \bar{\partial}_z \int\limits_{\partial Q_m} \gamma_m \wedge u_{p,\, n-2}.$$

Следовательно, для каждого m существует форма δ_m такая, что $\alpha_- = \bar{\partial}\delta_m$ в $C^n \setminus \bar{Q}_m$, причем $\delta_m - \delta_{m-1} = O(|z|^{1-2n})$ при $|z| \to \infty$. Если $n = 2$, то $\delta_m - \delta_{m-1}$ — голоморфная в $C^n \setminus \bar{Q}_{m-1}$ форма типа $(p, 0)$ с коэффициентами, стремящимися к 0 при $|z| \to \infty$, поэтому $\delta_m - \delta_{m-1} = 0$ и в этом случае существует одна форма δ такая, что $\alpha_- = \bar{\partial}\delta$ в $C^n \setminus H(\bar{D})$.

Теорема 4 при $p = n$ и $k = 2$ отмечалась в ([4]). Упомянутый выше результат из ([10]) означает, что для строго псевдовыпуклой области D второе слагаемое в (6) не нужно. Естественно возникает вопрос, по существу ли второе слагаемое, если D не является строго псевдовыпуклой. Ш. А. Даутов построил пример такой области D (где D — не область голоморфности) и такой формы $\alpha \in A^{\perp}(\bar{D})$, которая не продолжается с ∂D в $\bar{D}$ как $\bar{\partial}$-замкнутая форма типа $(n, n-1)$. Для этой формы α второе слагаемое в (6) нужно. Более того, при $n = 2$ такая форма существует для любой области D, если D не есть область голоморфности, ∂D связна и класса $C^{(2)}$. Вопрос о существенности второго слагаемого в (6) для случая, когда D — область голоморфности, но не строго псевдовыпукла, остается открытым.

Пользуюсь случаем поблагодарить Г. М. Хенкина и Ш. А. Даутова за ценные замечания.

Институт физики им. Л. В. Киренского
Сибирского отделения Академии наук СССР
Красноярск

Поступило
20 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Koppelman, Bull. Am. Math. Soc., 73, № 4 (1967). [2] А. М. Аропов, Ш. А. Даутов, Сибирск. матем. журн., 13, № 4 (1972). [3] Н. М. Гюнтер, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953. [4] Л. А. Айзенберг, Тез. докл. Всесоюзн. конфер. по теор. функций комп. перемен., Харьков, 1971. [5] Andreotti, Actes Congre's intern. Math., 2 (1970). [6] А. И. Сербин, ДАН, 196, № 6 (1971). [7] B. M. Weinstock, Proc. Am. Math. Soc., 2, № 4 (1970). [8] B. M. Weinstock, Proc. Am. Math. Soc., 21, № 2 (1969). [9] Л. А. Айзенберг, ДАН, 199, № 2 (1971). [10] Ш. А. Даутов, ДАН, 203, № 1 (1972). [11] J. J. Kohn, H. Rossi, Ann. Math., 81, № 3 (1965). [12] Л. А. Айзенберг, Сибирск. матем. журн., 8, № 5 (1967).