

М. П. МАТИЙЧУК

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ДИНИ

(Представлено академиком П. Г. Петровским 31 V 1972)

В наших заметках (^{7, 8}) методом Э. Хопфа и редукции к особым интегральным уравнениям установлена корректная разрешимость задач Дини-рихле и Неймана для параболических и эллиптических уравнений второго порядка при минимальной гладкости коэффициентов и краевых функций в областях, граница которых принадлежит классам Дини.

Здесь в сходных предположениях развитый С. Д. Эйдельманом (¹) метод исследования краевых задач используется для изучения классической разрешимости задачи с косою производной. Отметим, что исследованию свойств решений параболических и эллиптических уравнений с непрерывными по Дини коэффициентами или в областях с границами типа Дини — Ляпунова посвящены новые работы (⁴⁻⁶).

1. Основная теорема. Рассмотрим в области $Q = (0, T) \times \Omega$ для равномерно параболического уравнения краевую задачу

$$L_{t,x}(D)u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n a_i(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - a_0(t,x)u = f(t,x); \quad (1)$$

$$\mathcal{B}(t,x,D)u|_{\Gamma} \equiv \left(\sum_{i=1}^n b_i(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b_0(t,x)u \right) \Big|_{\Gamma} = g(t,x),$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \Gamma = (0, T) \times S, \quad S = \partial\Omega. \quad (2)$$

Имеет место следующая

Теорема. Предположим, что $a_{ij}(t,x) \in C_{t,x}^{(0,\omega)}(Q)$, $a_i(t,x) \in C_x^{(0,\omega)}(Q)$, $i = 0, 1, \dots, n$, причем модуль непрерывности $\omega_0(h)$ функций $a_{ij}(t,x)$ об-

ладает свойством $\int_{+0} F_0(\tau) \tau^{-1} d\tau < +\infty$; $b_i(t,x) \in C_{t,x}^{(0,\omega)}(\Gamma_0)$ и

$$\left| \sum_{i=1}^n b_i \cos(\mathbf{v}, x_i) \right|_{\Gamma} \geq \delta > 0; \quad \varphi \in C(\Omega), \quad f \in C_x^{(0,\omega)}(Q), \quad g \in C(\Gamma),$$

а выпуклая поверхность S принадлежит классу $C^{(1,\omega)}$; Γ_0 — граничная по лоса Γ .

Тогда существует функция Грина (G_1, G_2) неоднородной задачи (1), (2), с помощью которой решение определяется формулой

$$u(t,x) = \int_{\Omega} G_1(t, 0, x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\Omega} G_1(t, \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_S G_2(t, \tau, x, \xi) g(\tau, \xi) dS_{\xi}. \quad (3)$$

Для $u(t, x)$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |D_x^k u(t, x)| &\leq C [\|\varphi\|_C t^{-|k|/2} + g_k(t, \rho(x, S)) (\|f\|_\omega + \|g\|_C)]; \\ g_0(t, \rho) &= 1, \quad g_1(t, \rho) = t^{-1/2} \ln(1/\rho), \quad g_2(t, \rho) = \rho^{-1} t^{-1/2}, \\ \rho(x, S) &= \inf_{y \in S} \rho(x, y), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. Достаточно найти решение задачи

$$\tilde{L}_{t,x}(D)v = L_{t,x}(D)v + Av = fe^{-At} = \tilde{f}, \quad (1')$$

$$\mathcal{B}v|_\Gamma = ge^{-At} = \tilde{g}, \quad v|_{t=0} = \varphi(x), \quad (2')$$

где A постоянная (она выбирается позже).

Пусть $G^{v(\xi)}(t - \tau, x - \xi; \tau, \xi)$ — ядра Пуассона ^(1, 3) краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\tau, \xi) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \mathcal{B}_0(\tau, \xi, D)u|_{(x,v)=0} = g(t, z) \end{aligned}$$

для полупространства $(x, v(\xi)) \geq 0$, содержащего область Ω , $v(\xi)$ — внутренняя нормаль к S в точке ξ , $(\tau, \xi) \in \Gamma$, $z = x - (x, v)v$. Как и в ⁽¹⁾ определим специальное решение уравнения (1') соответствующее задаче (2'), формулой

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}(t, \tau, x, \xi) &= \tilde{G}^{v(\xi)}(t - \tau, x - \xi; \tau, \xi) - \\ &- \int_{\tau}^t d\beta \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{L}}(t, \beta, x, y) \tilde{L}_{\beta,y} \tilde{G}^{v(\xi)}(\beta - \tau, y - \xi; \tau, \xi) dy = \\ &\equiv \tilde{G}^{v(\xi)} - \tilde{W}(t, \tau, x, \xi); \quad \tilde{G}^v = G^v \exp\{-A(t - \tau)\}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}e^{-A(t-\tau)}$, $\mathcal{L}$ — фундаментальное решение уравнения (1) (см. ⁽⁸⁾). В силу условий на коэффициенты уравнения (1) для функции

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{t,x}(D) \tilde{G}^{v(\xi)}(t - \tau, x - \xi; \tau, \xi) &= \sum_{i,j=1}^n [a_{ij}(\tau, \xi) - a_{ij}(t, x)] \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tilde{G}^{v(\xi)} - \\ &- \sum_{i=1}^n a_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{G}^{v(\xi)} - a_0(t, x) \tilde{G}^{v(\xi)}(t - \tau, x - \xi; \tau, \xi) \end{aligned}$$

выполняются неравенства

$$|\tilde{L}_{t,x} \tilde{G}^{v(\xi)}| \leq c \omega_0(\sqrt{t - \tau})^{(t-\tau)-(n+2)/2} \exp\{-c\rho(t, \tau, x, \xi) - A(t - \tau)\}, \quad (5)$$

$$|\Delta_h^x \tilde{L}_{t,x} \tilde{G}^{v(\xi)}| \leq c [\omega_0(|h|) + \omega(|h|)] (t - \tau)^{-(n+2)/2} \exp\{-c\rho(t, \tau, x, x + h, \xi)\}, \quad (6)$$

$$\rho(t, \tau, x, x + h, \xi) = \min \left\{ \frac{|x - \xi|^2}{t - \tau}, \frac{|x + h - \xi|^2}{t - \tau} \right\}.$$

Объемный потенциал $\tilde{W}(t, \tau, x, \xi)$ в замыкании области Ω при $t > \tau$ имеет непрерывные первые производные, непосредственно вычисляемые под знаком интеграла, для которых, в силу (5), получаем оценку

$$\begin{aligned} D \tilde{W}(t, \tau, x, \xi) &\leq C \int_{\tau}^t d\beta \int_{\Omega} \frac{e^{-c\rho(t, \beta, x, y) - A(t-\beta)}}{(t - \beta)^{(n+1)/2}} \omega_0(\sqrt{\beta - \tau}) \frac{e^{-c\rho(\beta, \tau, y, \xi) - A(\beta - \tau)}}{(\beta - \tau)^{(n+2)/2}} dy \leq \\ &\leq CF_0(\sqrt{t - \tau}) (t - \tau)^{-(n+1)/2} \exp\{-c\rho(t, \tau, x, \xi) - A(t - \tau)\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Вторые производные, как обычно, вычисляются с помощью (6) по специ-

альной формуле, при этом

$$|D_{\alpha}^k \widetilde{W}| \leq c \ln \frac{1}{\rho(x, S)} \cdot [F_0(\sqrt{t-\tau}) + F(\sqrt{t-\tau})] (t-\tau)^{-(n+2)/2} \exp\{-c\rho - A(t-\tau)\}. \quad (8)$$

Рассмотрим, далее, поверхностный потенциал

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_S \widetilde{\mathcal{E}}(t, \tau, x, \xi) \mu(\tau, \xi) dS_{\xi}. \quad (9)$$

Если $S \in C^{(1, \omega)}$ и $\mu \in C(\Gamma)$ при $t > 0$, то имеет место важное соотношение (формула скачка)

$$\lim_{x \rightarrow z \in S} \mathcal{B}(t, x, D) u(t, x) = \mu(t, z) + \int_0^t d\tau \int_S \mathcal{B}(t, z, D) \widetilde{\mathcal{E}}(t, \tau, z, \xi) \mu(\tau, \xi) dS_{\xi}, \quad (10)$$

где x стремится к $z \in S$, находясь внутри острого кругового конуса с вершиной в точке z и осью $\nu(z)$.

Отыскиваем теперь решение задачи (1), (2) в виде потенциалов

$$v(t, x) = \int_{\Omega} \widetilde{\mathcal{L}}(t, 0, x; \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\Omega} \widetilde{\mathcal{L}}(t, \tau, x, \xi) \widetilde{f}(\tau, \xi) d\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_S \widetilde{\mathcal{E}}(t, \tau, x, \xi) \mu(\tau, \xi) dS_{\xi}, \quad (11)$$

где $\mu(t, z)$ предполагается непрерывной при $t > 0$ функцией. Удовлетворим за счет ее выбора краевому условию (2). В силу формулы (10) получим интегральное уравнение

$$\mu(t, z) = \mathcal{F}(t, z) + \int_0^t d\tau \int_S (-\mathcal{B}(t, z, D) \widetilde{\mathcal{E}}(t, \tau, z, \xi)) \mu(\tau, \xi) dS_{\xi}, \quad (12)$$

$$\mathcal{F}(t, z) \equiv - \int_{\Omega} \mathcal{B}(t, z, D) \widetilde{\mathcal{L}}(t, 0, z, \xi) \varphi(\xi) d\xi - \\ - \int_0^t d\tau \int_{\Omega} \mathcal{B}(t, z, D) \widetilde{\mathcal{L}}(t, \tau, z, \xi) \widetilde{f} d\xi + \widetilde{g}.$$

Для ядра $\mathcal{K}(t, \tau, z, \xi) \equiv -\mathcal{B}(t, z, D) \widetilde{\mathcal{E}}(t, \tau, z, \xi)$ имеет место оценка, позволяющая при достаточно большом положительном значении A построить соответствующую ядру $\mathcal{K}$ резольвенту

$$\mathcal{R}(t, \tau, z, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\tau}^t d\beta \int_S \mathcal{K}(t, \beta, z, y) \mathcal{K}_m(\beta, \tau, y, \xi) dS_y.$$

Отметим, что повторные ядра для $\mathcal{K}(t, \tau, z, \xi)$ имеют одинаковую особенность и для суммы ряда Неймана $\mathcal{R}(t, \tau, z, \xi)$ справедлива оценка с постоянной в экспоненте $A/2$ на месте A при $t - \tau$. Решение интегрального уравнения (12) определяется формулой

$$\mu(t, z) = \mathcal{F}(t, z) + \int_0^t d\tau \int_S \mathcal{R}(t, \tau, z, \xi) \mathcal{F}(\tau, \xi) dS_{\xi}. \quad (13)$$

В силу предположений о функциях φ , f и g имеем

$$|\mathcal{F}(t, z)| \leq C(\|\varphi\|_c t^{-1/2} + \sqrt{t}\|f\|_c) + \|g\|_c. \quad (14)$$

Последнее неравенство имеет место для решения $\mu(t, z)$.

Используя оценку (14), из формулы (11) получим нужные оценки (4) построенного решения исходной задачи.

Определим теперь функцию Грина задачи (1), (2) как ядро интегрального оператора, обратного соответствующему оператору этой задачи. Подставим выражение для $\mu(t, z)$ из (13) в (11) и поменяем на основании абсолютной сходимости всех рассматриваемых интегралов порядок интегрирования в поверхностном потенциале. Тогда для решения $v(t, x)$ задачи (1'), (2') получим формулу вида (3), в которой

$$\begin{aligned}\tilde{G}_2(t, \tau, x, \xi) &= \int_{\tau}^t d\beta \int_S \tilde{\mathcal{E}}(t, \beta, x, y) \mathcal{R}(\beta, \tau, y, \xi) dS_y + \tilde{\mathcal{E}} \equiv \tilde{\mathcal{E}} * \mathcal{R} + \tilde{\mathcal{E}}, \\ \tilde{G}_1(t, \tau, x, \xi) &= \tilde{\mathcal{L}}(t, \tau, x, \xi) - \tilde{\mathcal{E}} * [\mathcal{B} \tilde{\mathcal{L}} + \mathcal{R} * \mathcal{B} \tilde{\mathcal{L}}].\end{aligned}$$

Домножая эти функции на $\exp\{A(t - \tau)\}$, найдем соответствующие компоненты функции Грина задачи (1), (2).

2. Некоторые обобщения. Установленная теорема справедлива для краевой задачи с оператором Бесселя

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a(t, x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_{n+1}^2} + \frac{k}{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x_{n+1}} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^n a_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(t, x) u + f(t, x), \\ \mathcal{B}(t, x, D) u|_{\Gamma} &= g, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x_{n+1}} \right|_{x_{n+1}=0} = 0\end{aligned}$$

в цилиндрической области $Q^+ = (0, T) \times \Omega \times [0, \infty)$, $\Gamma = (0, T) \times S \times (0, \infty)$.

В силу существующей связи между решениями $\mathcal{B}$ -эллиптических и $\mathcal{B}$ -параболических уравнений ⁽⁹⁾ аналогичный результат о разрешимости задачи с косою производной имеет место для $\mathcal{B}$ -эллиптического уравнения

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_{n+1}^2} + \frac{k}{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x_{n+1}} \right) + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \\ + (a_0(x) - \lambda) u = f(x),\end{aligned}$$

где $\operatorname{Re} \lambda$ — достаточно большое положительное число.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность С. Д. Эйделману за постоянное внимание и полезное обсуждение работы.

Черновицкий государственный университет

Поступило
26 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Д. Эйделман, Параболические системы, «Наука», 1964. ² С. Д. Ивасишеч, Методы функционального анализа в задачах матем. физики. Инст. матем., Киев, 1971. ³ Б. Я. Липко, ДАН, 132, № 2, 279 (1960). ⁴ Л. И. Камынин, Б. И. Химченко, ДАН, 200, № 2, 282 (1971). ⁵ Е. И. Мойсеев, Дифференциальные уравнения, 9, 1655 (1971). ⁶ А. А. Новрузов, Докл. АН АзербССР, 26, № 10—11, 16 (1970). ⁷ М. И. Матийчук, С. Д. Эйделман, ДАН, 198, № 3, 533 (1971). ⁸ М. И. Матийчук, Тез. докл. XX научн. сессии матем. наук Черновицкого ун-ва, Черновцы, 1964. ⁹ В. В. Крехивский, М. И. Матийчук, Доп. АН УРСР, № 3 (1970).