Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 6

УДК 513.83 МАТЕМАТИКА

В. З. ФЕЙНБЕРГ

ПОЛНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком П. С. Александровым 30 V 1972)

Метрическое пространство (X, d), в котором вместо обычного неравенства треугольника выполняется усиленное неравенство треугольника $d(x, y) \leqslant \max(d(x, z), d(z, y))$, называется ультраметрическим пространством. Детальное изучение свойств ультраметрических пространств проведено в [1]. В настоящей работе решается задача классификации T-полных однородных ультраметрических пространств с точностью до изоморфизма. Метрическое пространство называется однородным, если для любых $x, y \in X$ существует автоморфизм φ этого пространства такой, что $\varphi(x) = y$. Метрическое пространство назовем T-полным, если любая убывающая последовательность непустых шаров имеет непустое пересечение.

1. Рассмотрим отображение f, которое каждому действительному числу $r > 0$ (множество всех таких r обозначим R_+) ставит в соответствие кардинальное число $\neq 0$. С этим отображением свяжем специальным образом построенное ультраметрическое пространство (X, d). Пусть X_r — произвольное множество мощности $f(r)$. Элементы (полного) прямого произведения ΠX_r, $r \in R_+$, будем называть **векторами** и записывать их в виде $x = (x_r)_{r\in R_+}$ (или просто $x = (x_r)$), $x_r \in X_r$, x_r — r-я координата вектора x. На множестве всех векторов введем **эквивалентность** $\sim$, полагая: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда множество $\{r \in R_+ | x_r \neq y_r\}$ удовлетворяет условию максимальности, т. е. всякая строго возрастающая последовательность элементов этого множества обрывается, x_r, y_r — r-е координаты векторов x и y соответственно. Класс эквивалентности по отношению $\sim$ назовем **компонентой множества** ΠX_r (или просто **компонентой**).

Пусть X — фиксированная компонента. На множестве X введем ультраметрику d, полагая $d(x, x) = 0$ и $d(x, y) = m$, $x \neq y$, m — наибольший элемент множества $\{r \in R_+ | x_r \neq y_r\}$. Нетрудно проверить, что так построенная по отображению f пара (X, d) действительно является ультраметрическим пространством.

Впредь построенное выше пространство (X, d) будем называть **B-пространством**, а отображение f — **основой B-пространства**. Нетрудно понять, что с точностью до изоморфизма B-пространство не зависит от выбора компоненты множества ΠX_r. Отметим, что в случае, когда f для любого $r = 1/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, принимает одно и то же значение (равное некоторому кардинальному числу τ), а для всех остальных $r \in R_+$, $f(r) = 1$, **B-пространство** (X, d) (с основой f) можно отождествить с обобщенным бэровским пространством (веса τ) [2].

Предложение. *B-пространство является T-полным однородным ультраметрическим пространством. Два B-пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их основы совпадают.*

2. **Теорема.** *T-полное однородное ультраметрическое пространство изоморфно B-пространству.*

Доказательство. Ниже приняты следующие обозначения: (X, d) — T-полное однородное ультраметрическое пространство, $G = \mathrm{Aut}\,(X, d)$ — группа всех автоморфизмов (X, d), 0 — фиксированный элемент в X, 0 не меняется на протяжении всего доказательства, $C_r = \{x \in X | d(0, x) < r\}$ — открытый шар радиуса r с центром в 0, $S_r = \{x \in X | d(0, x) \leqslant r\}$ — замкнутый шар радиуса r с центром в 0, X_r — множество всех попарно непересекающихся открытых шаров радиуса r, центр которых лежит в шаре S_r. Так как в ультраметрическом пространстве любые два шара либо не пересекаются, либо один из них содержит другой ([1]), то объединение всех шаров из X_r совпадает с S_r. По этой же причине $G_r = \{g \in G | g(0) \in S_r\}$ является подгруппой группы G. Будем считать, что множество элементов группы G вполне упорядочено, так что единица группы G — ее первый элемент. Через $L(M)$ обозначим наименьший элемент подмножества $M \subseteq G$.

Доказательство теоремы основано на идее «координатизации» элементов множества X элементами множеств X_r, $r \in R_+$. Координатизация элементов множества X достигается введением отображения φ: $X \to \Pi X_r$, определяемого следующим образом. Рассмотрим произвольный x из X. В силу однородности (X, d) существует $h \in G$ такое, что $h(0) = x$. Пусть $g = L(hG_r)$, тогда положим $\varphi(x)_r$ — r-я координата элемента $\varphi(x) \in \Pi X_r$, равна тому открытому шару из X_r, в котором лежит элемент $g^{-1}(x)$. Легко показать, что определение $\varphi(x)_r$ корректно.

Доказательство теоремы распадается на 4 последовательных шага. Вначале покажем, что образ $\varphi(X)$ множества X при отображении φ лежит в некоторой компоненте ΠX_r. Затем докажем инъективность φ. После этого докажем, что φ — гомоморфизм. И в конце приведем доказательство сюръективности φ.

Для того чтобы доказать, что $\varphi(X)$ лежит целиком в некоторой компоненте множества ΠX_r, нужно, очевидно, установить, что для любого $x \in X$ множество $\{r \in R_+ | \varphi(x)_r \neq \varphi(0)_r\}$ или, что то же самое, множество $P = \{r \in R_+ | \varphi(x)_r \neq C_r\}$ (так как $\varphi(0)_r = C_r$) удовлетворяет условию максимальности.

Пусть $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_i \leqslant \ldots$ — неубывающая последовательность чисел из P. Ей соответствует неубывающая последовательность групп $G_{r_1} \subseteq G_{r_2} \subseteq G_{r_3} \subseteq \ldots \subseteq G_{r_i} \subseteq \ldots$ Положим $A = \cup G_{r_i}$. Понятно, что A — подгруппа G. Пусть $a = L(hA)$, где h такое, что $h(0) = x$. Так как $h^{-1}a \in A$ и $A = \cup G_{r_i}$, то для некоторого n $h^{-1}a \in G_{r_n}$. Предположим теперь, что для некоторого i $r_i > r_n$. Тогда $G_{r_n} \subseteq G_{r_i} \subseteq A$.

Так как $h^{-1}a \in G_{r_n}$ и $G_{r_n} \subseteq G_{r_i}$, то $a \in hG_{r_i}$. Поэтому $L(hG_{r_i}) = s \leqslant a$, где $\leqslant$ — отношение порядка, которым вполне упорядочено множество элементов группы G. С другой стороны, $r_i > r_n$ влечет $G_{r_n} \subseteq G_{r_i}$ и, следовательно, $L(hG_{r_i}) \geqslant L(hG_{r_n})$, т. е. $s \geqslant a$. Таким образом $s = a$. Так как $a = L(hG_{r_n}) \in hG_r$, то $a^{-1}(x)$ и 0 лежат в замкнутом шаре радиуса r. Принимая во внимание, что диаметр и радиус замкнутого шара в ультраметрическом пространстве совпадают ([1]), получаем $d(a^{-1}(x), 0) \leqslant r_n$. Учитывая, что $r_i > r_n$ и $a = s$, из $d(a^{-1}(x), 0) \leqslant r_n$ имеем $d(s^{-1}(x), 0) < r_i$, т. е. $s^{-1}(x)$ лежит в $C_{r_i} \in X_r$ и, следовательно, $\varphi(x)_{r_i} = C_{r_i}$. Но равенство $\varphi(x)_{r_i} = C_{r_i}$ противоречит тому, что $r_i \in P$. Следовательно, предположение, что $r_i > r_n$ неверно, т. е. $r_i \leqslant r_n$. А это и доказывает, что P удовлетворяет условию максимальности.

Докажем, что φ — инъективное отображение. Пусть $x \neq y$, $x, y \in X$, $d(x, y) = r$ и $h_1(0) = x$, $h_2(0) = y$, $h_1, h_2 \in G$. Тогда $d(h_2^{-1}h_1(0), 0) = d(h_2^{-1}(x), 0) = d(x, h_2(0)) = d(x, y) = r$. Из $d(h_2^{-1}h_1(0), 0) = r$ вытекает $h_2^{-1}h_1 \in G_r$. Поэтому $h_2G_r = h_1G_r$ и, следовательно, $L(h_2G_r) = L(h_1G_r) = g$. Пусть $\varphi(x)_r = x_r \in X_r$, $\varphi(y)_r = y_r \in X_r$, тогда из $g = L(h_2G_r)$, $g = L(h_1G_r)$ вытекает $g^{-1}(x) \in x_r$, $g^{-1}(y) \in y_r$. Учитывая, что в ультраметрическом пространстве расстояние между любыми двумя точками, лежащими в открытом шаре радиуса r, строго меньше r ([1]), получаем, что равенство $x_r = y_r$ влечет $d(g^{-1}(x), g^{-1}(y)) < r$. Так как g — автоморфизм, то $d(g^{-1}(x), g^{-1}(y)) = d(x, y)$, что противоречит равенству

$d(x, y) = r$. Следовательно, если $x_r \neq y_r$, то $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, что и доказывает инъективность φ.

Докажем теперь, что отображение φ: $X \to \Pi X_r$ является гомоморфизмом пространства (X, d) в B-пространство C, где C — компонента ΠX_r, содержащая точку $\varphi(0) = (C_r)$. Пусть, как и прежде, $x, y \in X$, $d(x, y) = r$, $h_1(0) = x$, $h_2(0) = y$. Выше было показано, что r-е координаты $\varphi(x)_r$ и $\varphi(y)_r$ векторов $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ не равны и что $h_2 h_1^{-1} \in G_r$. Докажем, что l-координаты векторов $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ равны для $l > r$. (А это, очевидно, и означает, что расстояние между $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ равно r в соответствующем B-пространстве.) Так как $l > r$, то $G_r \subseteq G_l$. А учитывая, что $h_2 h_1^{-1} \in G_r$, получаем $h_1 G_l = h_2 G_l$. Следовательно, $L(h_1 G_l) = L(h_2 G_l) = g$. Отсюда $g^{-1}(x) \in x_l = \varphi(x)_l$, $g^{-1}(y) \in y_l = \varphi(y)_l$. Так как в ультраметрическом пространстве расстояние между любыми двумя точками несовпадающих открытых шаров радиуса r, лежащими в замкнутом шаре того же радиуса, равно r, то неравенство $x_l \neq x_r$ влечет $d(g^{-1}(x), g^{-1}(y)) = l$. Учитывая, что $g \in G$, получаем $l = d(g^{-1}(x), g^{-1}(y)) = d(x, y) = r$, а это противоречит неравенству $l > r$. Таким образом, доказано, что при $l > r$ $\varphi(x)_l = \varphi(y)_l$ и, следовательно, φ — гомоморфизм.

Для доказательства сюръективности φ нам необходимо следующее

Предложение. *Пусть x — произвольный элемент из X и $d(0, x) = r$. Тогда существует подстановка из G_r, переводящая x в 0.*

Рассмотрим теперь отображение φ и предположим, что оно не сюръективно. Тогда существует $b = (b_r)$ из C, не принадлежащее $\varphi(X)$, C — это компонента ΠX_r, в которую φ отображает X. Так как $\varphi(X)$ — T-полное пространство, то существует $a = (a_r)$ из $\varphi(X)$ такое, что $\rho(b, a) = \inf\limits_{y \in \varphi(X)} \rho(b, y) = r > 0$, ρ — это метрика, определенная на C, (C, ρ) — B-пространство.

Пусть $a = \varphi(x)$, $h \in G$ такое, что $h(0) = x$, и пусть t — точка из X, лежащая в шаре b_r, b_r — r-я координата вектора $b \in C$. Рассмотрим точку $g(t)$, $g = L(hG_r)$. Докажем, что r-я координата вектора $\varphi(g(t))$ равна b_r. Так как b_r лежит в $\bar{C}_r$, то $d(0, t) = p \leqslant r$. Согласно доказанному выше утверждению, в G_p существует подстановка ψ, переводящая t в 0, а так как $G_p \subseteq G_r$, то $\psi \in G_r$. Поэтому $g\psi^{-1}G_r = gG_r = hG_r$ и, следовательно, $L(g\psi^{-1}G_r) = L(hG_r) = g$, но $g\psi^{-1}(0) = g(t)$, поэтому r-я координата вектора $\varphi(g(t))$ равна шару, в котором содержится элемент $g^{-1}(g(t)) = t$, т. е. равна b_r.

Выше было показано, что φ — гомоморфизм (X, d) в (C, ρ), поэтому $\rho(\varphi(g(t)), a) = \rho(\varphi(g(t)), \varphi(x)) = d(g(t), x) = d(t, g^{-1}(x))$. В ультраметрическом пространстве из соотношений $t \in b_r$, $g^{-1}(x) \in a_r$, $a_r \subseteq \bar{C}_r$, $b_r \subseteq \bar{C}_r$, $a_r \neq b_r$ вытекает $d(t, g^{-1}(x)) = r$ (то, что $a_r \neq b_r$, следует из $\rho(a, b) = r$). Отсюда и из предыдущего получаем $\rho(\varphi g(t), a) = r$ и, следовательно, l-я координата вектора $\varphi g(t)$ равна a_l, $l > r$. Но из равенства $\rho(a, b) = r$ следует, что $a_l = b_l$, $l > r$. Таким образом, l-я координата вектора $\varphi g(t)$ равна b_l при $l > r$. Выше было доказано, что r-я координата вектора $\varphi g(t)$ равна b_r. Следовательно, $\rho(\varphi g(t), b) < b_r$. Но это противоречит тому, что $\rho(b, a) = \inf\limits_{y \in \varphi(X)} \rho(b, y) = r$. Поэтому окончательно имеем $\varphi(X) = C$, т. е. сюръективность доказана. Это и завершает доказательство теоремы.

Пусть (X, d) — T-полное однородное ультраметрическое пространство, а f — основа B-пространства, изоморфного пространству (X, d), тогда

Следствие 1. *Пространство (X, d) компактно тогда и только тогда, когда для некоторой монотонно убывающей к нулю последовательности $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3 \geqslant \ldots$ имеем $f(r_i) < \infty$ и $f(r) = 1$, если $r \neq r_i$, $r_i \in R_+$.*

Для доказательства достаточности нужно применить теорему Кенига ([3]).

Следствие 2. *Группа автоморфизмов пространства (X, d) (полугруппа эндоморфизмов) подобна (и тем более изоморфна) полному сплетению $\underset{r \in R_+}{W} S_r$ (соответственно $\underset{r \in R_+}{W} \Sigma_r$) групп подстановок S_r (соответственно* *полугрупп отображений) по линейно упорядоченному множеству R_+, где S_r (соответственно Σ_r) — группа (полугруппа) всех подстановок (отображений) множества мощности $f(r)$.*

Рассматриваемая в следствии конструкция полного сплетения групп подстановок введена и изучена в ([4], [6]); для случая полугрупп отображений см. ([6]). В ([6]) конструкция $\underset{r\in R_+}{W_r} S_r$ (или $\underset{r\in R_+}{W_r}\Sigma_r$) соответствует общей конструкции $(\mathfrak{f})\underset{r\in R_+}{W_r} G_r$ для случая, когда $\mathfrak{f}$ — фильтр дополнений всех подмножеств R_+, удовлетворяющих условию максимальности.

Из следствия 2 вытекает

Следствие 3. *Если* $|X| > 2$, *то* $\mathrm{Aut}(X, d)$ — *неабелева группа.*

Для случая, когда ультраметрическое пространство (X, d) таково, что $d(x, y) = \eta^m$, где $0 < \eta < 1$ и η не зависит от $x, y \in X$, а m — натуральное число, зависящее от x, y, и при дополнительном ограничении, в конечном счете, эквивалентном компактности (X, d) *, теоремы 1 и 2 и следствие 2 были доказаны Л. А. Калужниным в ([5]) ** (см. теоремы 2, 3 из ([5])).

Поступило
15 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

M. Krasner, Séminaire sur la théorie des corps values, p. I—V, Sémin., M. Krasner, Fac. sci. Paris, 1953—1954, 1, № 1—4; 2, № 5 (1956). [2] Ю. М. Смирнов, Изв. АН СССР, сер. матем., 20, № 2 (1956). [3] К. Куратовский, А. Мостовский, Теория множеств, М., 1970. [4] W. Charles Holland, J. Algebra, 13, 152 (1969). [5] L. Kaloujnine, Acta math. hung., 2, № 3—4 (1951). [6] В. З. Фейнберг, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 6 (1971).

* То, что это дополнительное условие из ([5]) эквивалентно компактности, вытекает из следствия 1 теоремы.

** Пространства, изученные Л. А. Калужниным в ([5]), целесообразно назвать целочисленными компактными однородными ультраметрическими пространствами.