Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 4

УДК 513.83 — *МАТЕМАТИКА*

Д. АДНАДЖЕВИЧ (ЮГОСЛАВИЯ)

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА A-ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 6 VII 1972)

Топологические пространства, объединения замкнутых множеств которых являются замкнутыми, будем называть **дискретными по Александрову пространствами**, или **A-пространствами** (см. [2]). Каждое A-пространство отождествляется с одним квазиупорядоченным множеством, а именно, если для каждой пары $a, b \in X$ пространства X, положить

$$a \rho b \Leftrightarrow a \in \bar{b},$$

то получается квазиупорядоченное множество (X, ρ), однозначно соответствующее A-пространству X. Это пространство будем означать через (X, U_ρ, ρ) или (X, U_ρ), где U_ρ — семейство открытых множеств. Здесь будут изучаться некоторые свойства A-пространств с использованием свойств квазиупорядоченных множеств.

1. Пусть (X, ρ) — квазиупорядоченное множество; **квазиупорядоченной цепью (квазицепью)** называется подмножество $(A, \rho) \subset \subset (X, \rho)$, любая пара которого сравнима между собой (квазицепь, являющуюся упорядоченным множеством, будем называть **цепью**). Минимальное число квазицепей (X, ρ_α), $\alpha \in K$, пересечение * которых дает квазиупорядоченное множество (X, ρ), называется размерностью множества (X, ρ), т. е. $\operatorname{card} K = ds(X, \rho)$. Для пространства X определяется размерность $\operatorname{Dm} X$ следующим способом.

Определение 1.1. 1°) $\operatorname{Dm} \theta = -1$. 2°) $\operatorname{Dm} X = 0$, если в каждое покрытие (под покрытием будем понимать открытое покрытие) можно вписать покрытие, нерв которого является антицепью. 3°) $\operatorname{Dm} X \leqslant n$, $n \geqslant 1$, если в каждое покрытие $\mathcal{U}$ можно вписать покрытие $\mathcal{V}$, нерв $N(\mathcal{V})$ которого удовлетворяет условию $ds\, N(\mathcal{V}) \leqslant n+1$; если $\operatorname{Dm} X \leqslant n$, $\operatorname{Dm} X \nleqslant n-1$, полагаем $\operatorname{Dm} X = n$. 4°) Если $\operatorname{Dm} X > n$ для каждого натурального n, то будем говорить $\operatorname{Dm} X = \infty$ (см. [1]).

Множество

$$\tilde{x} = \{y \in X;\ x \rho y\} = [x, \rightarrow)$$

является минимальным открытым множеством, содержащим x. Семейство $\{\tilde{x}; x \in X\}$ есть база пространства X.

Из того, что открытое множество $U \subset (X, \mathcal{U}_\rho)$ имеет вид $U = \bigcup_{\alpha \in A} [a_\alpha, \rightarrow)$, а замкнутое $F \subset (X, \mathcal{U}_\rho)$ — вид $F = \bigcup_{\beta \in B} (\leftarrow, b_\beta)$, следует, что открытое множество является возрастающим, а замкнутое убывающим. Более того, множество K является открытым (замкнутым) тогда и только тогда, если оно возрастающее (убывающее). Именно, если K возрастающее, то положим $\tilde{K} = \bigcup_{a \in K} [a, \rightarrow)$, откуда видно, что $\tilde{K} = K$. Подобным же образом положим $\bar{K} = \bigcup_{a \in K} (\leftarrow, a]$, откуда вытекает $\bar{K} = K$ (см. [4]).

Пусть $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство максимальных квазицепей A-пространства $(X, \mathcal{U}_\rho)$. Обозначим через p_α первый элемент цепи C_α (p_α и p_β могут

---

* Под пересечением квазицепей (X, ρ_α), $\alpha \in K$, понимается квазиупорядоченное множество (X, ρ) такое, что $x \rho y \Leftrightarrow x \rho_\alpha y \quad \forall \alpha \in K$, $x, y \in X$.

совпадать для $\alpha \neq \beta$); в случае, когда существует набор элементов $\{p_{\alpha, a}\}_a$, $p_{\alpha, a} \rho p_{\alpha, b}$, $p_{\alpha, b} \rho p_{\alpha, a}$, в качестве первого берем какой-либо элемент набора $\{p_{\alpha, a}\}_a$.

Расширим цепь C_α добавлением первого элемента p_α^δ, если его нет; отождествим $p_\alpha^\delta = p_\beta^\delta$, если существует $a \in C_\alpha$, C_β такое, что $(p_\alpha^\delta, a] = (p_\beta^\delta, a]$. Назовем полученное A-пространство $(X^\delta, \mathcal{U}_\beta)$ расширением A-пространства $(X, \mathcal{U}_\rho)$.

Семейство

$$\mathcal{K}^\delta = \{\widetilde{p}_\alpha\}_\alpha \cup \{p_\beta^\delta\}_\beta$$

является покрытием пространства $(X^\delta, \mathcal{U}_\rho)$, а семейство

$$\mathcal{K} = \{\widetilde{p}_\alpha\}_\alpha \cup \{\widetilde{p}_\beta^\delta \setminus \{p_\beta^\delta\}\}_\beta$$

является покрытием пространства $(X, \mathcal{U}_\rho)$; назовем эти покрытия каноническими.

2. Разобьем на классы элементы квазиупорядоченного множества (X, ρ), так что в классе $x^* \in X^*$ будут те и только те элементы $y \in X$, для которых имеют силу отношения $x \rho y$, $y \rho x$, т. е. $x \sim y \Leftrightarrow x \rho y$, $y \rho x$. Очевидно, что классы $x^* \in X^*$ являются классами эквивалентности. Если X^* упорядочить порядком ρ^*, считая $x^* \rho^* y^*$ тогда и только тогда, когда $x \rho y$, то $(X^*, \mathcal{U}_{\rho^*})$ станет упорядоченным множеством.

Предложение 2.1. *Пусть $(X, \mathcal{U}_\rho)$ — A-пространство. Пространство $(X^*, \mathcal{U}_{\rho^*})$ гомеоморфно фактор-пространству $(X, \mathcal{U}_\rho) / \sim$.* □

Берем два A-пространства $(X, \mathcal{U}_\rho)$, $(Y, \mathcal{V}_\tau)$. Если рассматривать их декартово произведение $X \times Y$, то на нем можно сравнивать две топологии: топологию произведения $\mathcal{U}_\rho \times \mathcal{V}_\tau$ и топологию, индуцированную кардинальным произведением ω квазипорядков ρ, τ, т.е. $(x, y)\ \omega\ (x', y') \Leftrightarrow x \rho x', y \tau y'$.

Предложение 2.2. *Топология произведения $\mathcal{U}_\rho \times \mathcal{V}_\tau$ пространств $(X, \mathcal{U}_\rho)$, $(Y, \mathcal{V}_\tau)$ тождественна с топологией кардинального произведения ω множеств (X, ρ), (Y, τ).* □

Барицентрическое подразделение $V(X)$ квазиупорядоченного множества (X, ρ) будем строить следующим способом (см. ([2])).

Все элементы множества X будут минимальными элементами множества $(X^v, \rho^v) = V(X)$. Элементами множества $V(X)$ будут всевозможные подмножества каждой цепи $C_\alpha \in \mathcal{C}$. Отношение ρ^v таково, что $K \rho^v L$, $K, L \in V(X)$, если: 1°) K является подмножеством множества L в множестве X; 2°) любой элемент множеств K, L можно заменить ему эквивалентным элементом множества X.

Предложение 2.3. *Пусть (X, ρ) — квазиупорядоченное множество. Барицентрическое подразделение $V(X^*, \rho^*)$ упорядоченного множества классов эквивалентности (X^*, ρ^*) множества (X, ρ) изоморфно упорядоченному множеству $[V(X, \rho)]^*$ классов эквивалентности квазиупорядоченного множества $V(X, \rho)$.*

Доказательство. Нужно доказать изоморфизм множества $V(X^*)$ и $[V(X)]^*$. Построим функцию f: $V(X^*) \to [V(X)]^*$ следующим способом. Обозначим через φ: $X \to X^*$ и ψ: $V(X) \to [V(X)]^*$ канонические отображения; ξ: $\mathcal{C}(X^*) \to V(X^*)$, η: $\mathcal{C}(X) \to V(X)$ отображают множество всех цепей $\mathcal{C}(X^*) \subset 2^{X^*}$, $\mathcal{C}(X) \subset 2^X$ в соответствующие барицентрические подразделения, так что $\xi(K)$, K — цепь в X^*, означает элемент из $V(X^*)$, определенный цепью K, и аналогично $\eta(L)$, L — цепь в X, означает элемент из $V(X)$, определенный цепью L. Теперь для элемента $K \in V(X^*)$ берем $\xi^{-1}(K) = L \in \mathcal{C}(X^*)$, потом, для каждого $a_\alpha^* \in L = \{a_\alpha^*\}_\alpha$, берем по элементу из $\varphi^{-1}(a_\alpha^*)$; пусть это будет a_α. Обозначим $M = \{a_\alpha\}_\alpha$. Элемент M определяет элементы $N = \eta(M) \in V(X)$ и $P = \psi(N) \in [V(X)]^*$. Легко доказать, что элемент P не зависит от выбора элемента $a_\alpha \in \varphi^{-1}(a_\alpha^*)$.

Наконец, положим $P = f(K)$. Биективность функции f легко доказывается. Далее, пусть K, $K' \in V(X^*)$, $K\ (\rho^*)^v K'$. Отсюда следует $L \subset L'$,

$L=\xi^{-1}(K)$, $L'=\xi^{-1}(K')$. Если $L=\{a_\alpha^*\}_{\alpha\in D}$, $L'=\{a_\alpha^*\}_{\alpha\in D'}$, $D\subset D'$, то выберем $M=\{a_\alpha\}_{\alpha\in D}$, $M'=\{a_\alpha\}_{\alpha\in D'}$, т. е. $M\subset M'$. Отсюда следует $N\rho^v N'$, $N=\eta(M)$, $N'=\eta(M')$, и $P\,(\rho^v)^*P'$, $P=\psi(N)$, $P'=\psi(N')$. Изотонность функции f доказана. Доказательство дуальной изотонности опускаем. □

3. При рассмотрении свойств размерности в этом параграфе мы будем иметь дело с квазиупорядоченными множествами (X,ρ), удовлетворяющими следующему условию.

Условие 3.1. Для каждого $x^*\in(X^*,\rho^*)$, число всех элементов $\{y^*;\ y^*\rho^*x^*\}$, несравнимых между собой, конечно.

Прежде чем рассмотреть размерность A-пространств, рассмотрим некоторые свойства покрытий.

Если брать какое-нибудь покрытие $\mathscr{P}=\{V_\alpha\}_\alpha$ A-пространства $(X,\mathscr{U}_\rho)$, то в него всегда можно вписать каноническое покрытие $\mathscr{K}=\{\tilde{p}_\alpha\}_{\alpha\in A}\cup\{\tilde{p}_\beta^\delta\setminus\{p_\beta^\delta\}\}_{\beta\in B}$; именно: все точки минимальных открытых множеств $\tilde{p}_\alpha$ и $\tilde{p}_\beta^\delta\setminus\{p_\beta^\delta\}$ находятся только в открытых множествах вида

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in A'\subset A}\tilde{p}_\alpha\Big)\cup\Big(\bigcup_{\beta\in B'\subset B}\tilde{p}_\beta^\delta\Big).$$

Это значит, что исследование размерностей dim и Dm требует только исследования канонического покрытия. В случае конечных покрытий исследования касаются всевозможных покрытий вида (см. ([3], [5])).

$$\Big\{\Big(\bigcup_{\alpha\in A_i}\tilde{p}_\alpha\Big)\cup\Big(\bigcup_{\beta\in B_i}(\tilde{p}_\beta^\delta\setminus\{p_\beta^\delta\})\Big)\Big\}_{i-1}^{m},$$
$$A_i\cap A_j=\theta,\quad B_i\cap B_j=\theta,\quad i\neq j.$$

Отсюда непосредственно следует

Теорема 3.1. *Размерность* $\dim X$ *A-пространства X есть наибольшее целое число n такое, что существуют минимальные элементы* $x_0,x_1,\ldots,x_n$ *расширения пространства X и такая точка $x\in X$, что* $x_i\,\rho\,x$, $i=0,1,\ldots,n$. □

Без доказательства приведем

Предложение 3.1. *Для ассоциированного с A-пространством* $(X,\mathscr{U}_\rho)$ *пространства* $(X^*,\mathscr{U}_{\rho^*})$ *имеет место равенство* $\dim X^*=\dim X$. □

Рассмотрим размерность произведения двух A-пространств.

Теорема 3.2. *Пусть размерности двух A-пространств* $(X,\mathscr{U}_\rho)$, $(Y,\mathscr{V}_\tau)$ *будут* $\dim X=m$, $\dim Y=n$. *Тогда для размерности* $\dim\,(X\times Y)$ *имеет место равенство* $(\dim X\times Y)=mn+m+n$.

Доказательство. Предположим, что для каждого элемента множеств X, Y существует минимальный элемент. Доказательство проводится тем же способом, даже если это не так. Пусть $x_0,x_1,\ldots,x_m$, $x\in X$, $x_i\,\rho\,x$, $i=0,1,\ldots,m$, y_0, $y_1,\ldots,y_n$, $y\in Y$, $y_j\,\tau\,y$, $j=0,1,\ldots,n$, и x_0, $x_1,\ldots,x_m$, y_0, $y_1,\ldots,y_n$ — минимальные элементы. На основании предложения 2.2 достаточно доказать, что размерность $\dim\,(X\times Y)$ кардинального произведения $X\times Y$ равна $mn+m+n$. Из $(x_i,y_j)\ \omega\ (x,y)$, где ω — квазипорядок в $X\times Y$, $i=0,1,\ldots,m$, $j=0,1,\ldots,n$, следует $\dim\,(X\times Y)\geqslant mn+m+n$. Если бы было $\dim\,(X\times Y)>mn+m+n$, то либо в X больше, чем $m+1$, либо в Y больше, чем $n+1$ минимальных элементов, имеющих совместный элемент, следующий за всеми. □

Чтобы рассмотреть размерность барицентрического подразделения множеств, ограничимся множествами X, удовлетворяющими следующему условию.

Условие 3.2. Каждая цепь конечна.

Предложение 3.2. *Пусть* $(X,\mathscr{U}_\rho)$ *— A-пространство, где ρ является порядком. Размерность* $\dim V(X)$ *барицентрического подразделения равна максимальной длине цепи множества X.*

Доказательство. Пусть $\{x_0,x_1,\ldots,x_n;\ \ x_i\,\rho\,x_{i+1},\ i=0,1,\ldots$ $\ldots,n-1\}$ — цепь максимальной длины n. В пространстве $(V(X),\rho^v)$

существует элемент z, $x_i \rho^v z$, $i = 0, 1, \ldots, n$. С другой стороны, не существуют элементы $y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}$, имеющие совместный последующий элемент. □

Следствие 3.1. *Размерность* $\dim K$ *полного симплициального комплекса* K *равна наибольшему числу измерений его остова.* □

Для упорядоченного множества (X, ρ), удовлетворяющего условию 3.1, построим теперь упорядоченное множество (X_0, ρ) следующим образом.

Прежде всего построим расширение (X^δ, ρ) множества (X, ρ). Пусть $A = \{a_0{}^0, a_1{}^0, \ldots, a_n{}^0\} \in X^\delta$ — любой максимальный набор минимальных элементов и $a_i^0 \rho a$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Если не существует элемент $a_{i,k}^1$, $a_i^0 \rho a_{i,k}^1, a_k^0 \rho a_{i,k}^1$, $a_j^0 \| a_{i,k}^1, j \neq i, k, i, j, k = 0, 1, \ldots, n$, добавим к множеству X^δ такой элемент $a_{i,k}^1$; если есть элементы с тем свойством, берем один; обозначим его через $a^i{}_{,k}$. Далее, берем из набора A по тройкам $a_i{}^0$, $a_j{}^0$, $a_k{}^0$, $i, j, k = 0, 1, \ldots, n$, и добавим к множеству X^δ элемент $a_{i,j,k}^2$, a_i^0, a_j^0, $a_k^0 \rho a_{i,j,k}^2$, $a_m^0 \| a_{i,j,k}^2$, $m \neq i, j, k$, если такого элемента нет; положим $a_{i,j}^1, a_{j,k}^1, a_{j,k}^1 \rho a_{i,j,k}^2$. Этот метод построения продолжим, так что в конце получается следующее: подмножество $(\leftarrow, a]$ в новом множестве содержит, в качестве своего подмножества, множество, изоморфное полному симплициальному комплексу. Если для каждого набора минимальных элементов, имеющих общую верхнюю грань, сделать то же самое, получится множество (X_0, ρ), которое будем называть пополнением множества (X, ρ).

Лемма 3.1. *Размерность* $ds(A, \rho)$ *подмножества* $(A, \rho) \subset (X, \rho)$ *удовлетворяет условию* $ds(A, \rho) \leqslant ds(X, \rho)$.

Доказательство опускаем (см. ([1])). □

Теорема 3.3. *Пусть A-пространство* $(X, \mathcal{U}_\rho)$, *где* ρ — *порядок, удовлетворяет условию* 3.1. *Тогда для размерности* $\mathrm{Dm}\, X$ *имеет место неравенство* $\mathrm{Dm}(X, \mathcal{U}_\rho) \leqslant ds(X_0, \rho) - 1$, *где* X_0 — *пополнение пространства* X.

Доказательство. В случае $\mathrm{Dm}\, X = 0$ утверждение очевидно. Если $\mathrm{Dm}\, X \geqslant 1$, то в каждое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X можно вписать каноническое покрытие $\mathcal{K}$. Нерв $N(\mathcal{K})$ есть полный симплициальный комплекс, изоморфный комплексу, остовами которого являются максимальные наборы минимальных элементов расширения X^δ множества X, имеющие общую верхнюю грань. Этот же комплекс является подмножеством пополнения X_0, откуда в силу леммы 3.1 вытекает утверждение теоремы. □

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Белградский университет, Югославия

Поступило
29 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Adnadjevic, Матем. вестник, Београд, 2 (17), № 2 (1965). [2] П. Александров, Матем. сборн., 2, № 3 (1937). [3] D. W. Bass, J. London Math. Soc., 1, № 3 (1969). [4] A. R. Pears, Proc. London Math. Soc., 23, № 3 (1971). [5] R. E. Strong, Trans. Am. Math. Soc., 123, 325 (1966).