Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 5

УДК 551.511.3 ГИДРОМЕХАНИКА

Е. Б. ГЛЕДЗЕР

СИСТЕМА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА, ДОПУСКАЮЩАЯ ДВА КВАДРАТИЧНЫХ ИНТЕГРАЛА ДВИЖЕНИЯ

(Представлено академиком А. М. Обуховым 28 VII 1972)

В работе [1] для моделирования трансформации энергии в турбулентной жидкости была предложена простейшая квадратично нелинейная система, сохраняющая в пренебрежении диссипацией квадратичный интеграл движения:

$$\begin{aligned} \dot{v}_0 &= -p_0 v_1^2 + f_0, \\ \dot{v}_1 &= p_0 v_0 v_1 - p_1 v_2^2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \dot{v}_k &= p_{k-1} v_{k-1} v_k - p_k v_{k+1}^2 - \lambda_k v_k. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь v_i и p_i — обобщенные скорости и геометрические параметры, λ_k — диссипативные коэффициенты, пропорциональные вязкости, которая действует на достаточно «высокие» степени свободы.

Энергия, отнесенная к единице массы, $E = \frac{1}{2}\sum_i v_i^2$, сохраняется при отсутствии внешнего воздействия ($f_0 = 0$) и при $\lambda_k = 0$. При больших числах Re в условиях самоподобия ($p_{i+1} / p_i = \mathrm{const}$) система [1] допускает стационарное решение, эквивалентное колмогоровскому закону, описывающему каскадный процесс передачи энергии в развитом турбулентном потоке *.

Известно, что плоский поток невязкой несжимаемой жидкости имеет, кроме интеграла энергии, также второй квадратичный интеграл движения — среднее значение квадрата вихря **. В ряде работ (см. [5]) для двумерной турбулентности было показано, что, кроме режима передачи энергии, приводящего к колмогоровскому закону, может существовать другой стационарный режим, связанный с передачей квадрата вихря по спектру. В данной заметке этот вопрос исследуется с помощью дискретной модели уравнений движения, аналогичной системе (1).

Система (1) является с.г.т. с простым зацеплением, когда каждое уравнение связано с предыдущим и последующим. Выпишем с.г.т., сохраняющую, как и в плоском потоке, два квадратичных интеграла — энергию и квадрат вихря, но имеющую более сложное зацепление, чем (1): каждое уравнение связано с двумя предыдущими и двумя последующими. Причем, в силу уравнения сохранения фазового объема (см. [2])

$$\sum_i \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_i} = 0,$$

будем предполагать, что в уравнении для i-й моды не входит соответствую-

* Система (1) является естественным обобщением «систем гидродинамического типа» (с.г.т.), рассмотренных в работах [2, 3].

** Эту величину некоторые авторы называют также энстрофией [4].

щая ей скорость. При этих условиях система имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned}
&\dot v_0 = c_0^{(1)} v_1 v_2 + f_0,\\
&\dot v_1 = c_1^{(1)} v_2 v_3 + c_1^{(2)} v_0 v_2 + f_1,\\
&\dot v_2 = c_2^{(1)} v_3 v_4 + c_2^{(2)} v_1 v_3 + c_2^{(3)} v_0 v_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dot v_i = c_i^{(1)} v_{i+1} v_{i+2} + c_i^{(2)} v_{i-1} v_{i+1} + c_i^{(3)} v_{i-1} v_{i-2} - \lambda_i v_i,\\
&\qquad \lambda_i = 0, \quad i < r.
\end{aligned} \tag{2}$$

Требуя выполнение законов сохранения энергии и квадрата вихря $= \frac{1}{2}\sum_i k_i^2 v_i^2$ при $\lambda_i = 0$, $f_0 = f_1 = 0$, где k_j и $L_i = 1/k_i$ — волновое число и масштаб i-й моды соответственно, получаем условия

$$\begin{aligned}
c_i^{(1)} + c_{i+1}^{(2)} + c_{i+2}^{(3)} = 0,\\
k_i^2 c_i^{(1)} + k_{i+1}^2 c_{i+1}^{(2)} + k_{i+2}^2 c_{i+2}^{(3)} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Отсюда

$$c_i^{(2)} = -c_{i-1}\frac{k_{i-1}^2 - k_{i+1}^2}{k_i^2 - k_{i+1}^2}, \qquad c_i^{(3)} = c_{i-2}\frac{k_{i-2}^2 - k_{i-1}^2}{k_{i-1}^2 - k_i^2}, \qquad c_i^{(1)} \equiv c_i, \tag{4}$$

$$\dot v_i = c_i v_{i+1} v_{i+2} - c_{i-1} v_{i-1}\frac{k_{i-1}^2 - k_{i+1}^2}{k_i^2 - k_{i+1}^2} v_{i+1} + c_{i-2}\frac{k_{i-2}^2 - k_{i-1}^2}{k_{i-1}^2 - k_i^2} v_{i-1} v_{i-2}. \tag{5}$$

Пусть $c_i > 0$ при всех i. Тогда, как легко видеть из (5), более высокие степени свободы будут развиваться, если силы f_0 и f_1 достаточно велики. При наличии внешнего возбуждения выполняются уравнения баланса

$$\frac{dE}{dt} = W_E, \quad E = \frac{1}{2}\sum_i v_i^2, \quad W_E = f_0 v_0 + f_1 v_1;$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = W_\Omega, \ \Omega = \frac{1}{2}\sum_i k_i^2 v_i^2, \quad W_\Omega = k_0^2 f_0 v_0 + k_1^2 f_1 v_1.$$

Найдем стационарное решение системы (2) в предположении, что имеет место самоподобие:

$$\frac{c_{i+1}}{c_i} = \frac{k_{i+1}}{k_i} = \frac{L_i}{L_{i+1}} = q > 1, \quad v_{i+1}/v_i = \mu.$$

Тогда возможны два случая:

$$\mu = q^{-1/3}, \quad v_i = \left(-\frac{W_E q^3 \alpha}{q^2 - 1}\right)^{1/3} L_i^{1/3}, \quad \alpha = c_0 L_0, \tag{6}$$

$$\mu = q^{-1}, \quad v_i = \left(\frac{W_\Omega q^3}{q^2 - 1}\frac{1}{\alpha}\right)^{1/3} L_i. \tag{7}$$

Первый случай (6), полученный и в работе [1], соответствует колмогоровскому закону, причем оказывается, что

$$W_\Omega = 0. \tag{8}$$

Таким образом, при осуществлении стационарного потока энергии поток квадрата вихря равен нулю. Второй случай (7) связан с передачей квадрата вихря по спектру. Ему соответствует известный закон «минус 3» для плотности энергии в спектре плоского турбулентного потока, причем оказывается, что при выполнении (7)

$$W_E = 0. \tag{9}$$

Результаты (6) — (9) полностью соответствуют работе [5].

Пусть теперь приток энергии и квадрата вихря (W_E, $W_\Omega > 0$) происходит за счет внешних сил в мелкомасштабной области, так что при достаточно большом s в правые части уравнений для v_s, v_{s+1}, v_{s+2} добавлены силы f_s, f_{s+1}, f_{s+2}. Кроме того, пусть при $i \geqslant r$, $r \gg s$ в уравнении (2) добавлены члены, учитывающие вязкость, так что движения соответствующих степеней свободы затухают. А силы f_0 и f_1 будем считать возникающими из-за нестационарности движения мод, характерные размеры которых больше L_0. В этих условиях система (2), (5) имеет стационарное решение

$$v_i = \left(\frac{W_E q^3 \alpha}{q^2 - 1}\right)^{1/3} L_i^{1/3} \quad \text{при} \quad i \leqslant s + 1,$$

причем поток энергии $W_E = \sum_{i=s}^{s+2} f_i v_i$ от мелкомасштабных движений увеличивает энергию нестационарных крупномасштабных пульсаций. И в соответствии с (8) при $i \leqslant s+1$ равен нулю поток квадрата вихря.

Затем

$$v_i = \left(\frac{W_\Omega q^3}{(k^2 - 1)\alpha}\right)^{1/3} L_i \quad \text{при} \quad i > s + 1,$$

причем поток завихренности $W_\Omega = -\frac{1}{2}\sum_{i=s}^{s+2} k_i^2 f_i v_i$ идет в область диссипации. В этом диапазоне равен нулю поток энергии (9). Эти результаты были получены в ([5]) путем качественных рассуждений.

Заметим, что если мелкомасштабные пульсации отдают энергию и завихренность (W_E, $W_\Omega < 0$), то сначала может осуществляться режим передачи квадрата вихря, а при $i > s + 1$ — режим передачи энергии.

Автор благодарит акад. А. М. Обухова за постановку задачи.

Институт физики атмосферы
Академии наук СССР
Москва

Поступило
22 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Обухов, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, **7**, № 7, 695 (1971). [2] А. М. Обухов, ДАН, **184**, № 2 (1969). [3] A. M. Obukhov, Fluid Dyn. Trans., **5**, 11, 193 (1971). [4] Б. Л. Гаврилин, А. П. Мирабель, А. С. Монин, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, **8**, № 5, 483 (1972). [5] R. H. Kraichnan, Phys. Fluids, **10**, № 7, 1417 (1967).