**Доклады Академии наук СССР**
**1973. Том 209, № 1**

УДК 513.881

***МАТЕМАТИКА***

И. А. БЕРЕЗАНСКИЙ

# УЛЬТРАПОЛНОТА ПРОСТРАНСТВ, СИЛЬНЫХ СОПРЯЖЕННЫХ К ПРОСТРАНСТВАМ ФРЕШЕ — МОНТЕЛЯ

*(Представлено академиком П. С. Новиковым 30 V 1972)*

Проведенные в последние годы исследования по проверке различных усилений свойства полноты для основных неметризуемых пространств функционального анализа привели к отрицательным результатам. Пространства $D$ и $D'$ не являются даже наследственно полными ([1], [2]).

С другой стороны, был получен ряд глубоких результатов, касающихся так называемых ультраполных равномерных пространств ([3–6]), в частности, равномерностное обобщение теоремы Банаха о замкнутом графике. Однако для топологических линейных пространств ультраполнота является существенно более сильным ограничением, чем совершенная и тем более наследственная полнота. В связи с этим небезынтересно выяснить, насколько широк класс ультраполных пространств. Ранее было установлено ([7]), что топологическая прямая сумма счетного семейства прямых $L$ ультраполна. Это пространство являлось до настоящего времени единственным примером неметризуемого ультраполного топологического линейного пространства.

Данная работа посвящена доказательству ультраполноты для некоторого класса топологических линейных пространств. Этот класс содержит, в частности, все пространства, представимые в виде счетных индуктивных пределов нормированных пространств с вполне непрерывными вложениями.

Автору неизвестно, имеет ли место аналогичный результат для счетных индуктивных пределов банаховых пространств со слабо вполне непрерывными вложениями.

Приведем основные о п р е д е л е н и я. Пусть задано некоторое множество $X$. Упорядочим $2^{2^X}$, полагая $o_1 < o_2$, если всякое подмножество $O_2 \in o_2$ содержится в некотором $O_1 \in o_1$ (система $o_2$ подмножеств множества $X$ вписана в $o_1$). Если $o \in 2^{2^X}$, то через $[o]$ будем обозначать множество всех $q \in 2^{2^X}$ таких, что $q < o$. Соответственно, если $\omega \subset 2^{2^X}$, то $[\omega]^{\text{опр}} \bigcup_{o\in\omega} [o]$.

**Пусть** $\omega \in 2^{2^{2^X}}$ и $o \in 2^{2^X}$. Всякому отображению $\xi$: $o \to \omega$ ($o$ — подмножество $2^X$, $\omega$ — подмножество $2^{2^X}$) можно поставить в соответствие систему $o_\xi \in 2^{2^X}$, образованную всеми подмножествами $X$ вида $O \cap Q$, где $O \in o$, $Q \in \xi(0)$. Введем отображения

$$\varphi\colon 2^{2^X} \times 2^{2^{2^X}} \to 2^{2^{2^X}},$$

полагая $\varphi(o, \omega) = [\{o_\xi\}_{\xi \in \omega^o}]$, и

$$\Phi\colon 2^{2^{2^X}} \times 2^{2^{2^X}} \to 2^{2^{2^X}},$$

полагая $\Phi(\omega_1, \omega_2) = \bigcup_{o \in \omega_1} \varphi(o, \omega_2)$.

Будем говорить, что семейство $\omega \in 2^{2^{2^X}}$ замкнуто в смысле Гинзбурга и Исбелла ($GI$-замкнуто), если $\Phi(\omega, \omega) = \omega$ *. Как нетрудно убедиться,

* Имена С. Гинзбурга и Дж. Исбелла упоминаются здесь в связи с их работой ([8]).

для любого семейства $\omega$ существует наименьшее содержащее его $GI$-замкнутое семейство $\bar{\omega}$, которое мы будем называть $GI$-замыканием $\omega$.

Пусть теперь $\omega$ — равномерный фильтр покрытий на $X$ и $\tau_\omega$ — соответствующая равномерная топология на $X$. Как известно, $\omega$ обладает базисом, образованным покрытиями, элементы которых суть открытые множества в топологии $\tau_\omega$ (т. е. для любого покрытия $o \in \omega$ найдется открытое покрытие $\tilde{o}$ такое, что $\tilde{o} \in \omega$ и $\tilde{o} \succ o$. Используя определение $GI$-замыкания, легко показать, что семейство $\bar{\omega}$ также обладает базисом из открытых покрытий. Отделимое равномерное пространство $(X, \omega)$ называется ультраполным, если, обратно, любое открытое покрытие пространства $(X, \tau_\omega)$ содержится в $\bar{\omega}$.

Это определение эквивалентно ([3]) * обычно употребляемому определению ультраполного пространства, в котором используются хаусдорфова равномерность на множестве всех замкнутых подмножеств пространства $(X, \tau_\omega)$.

Пусть $(E, \tau)$ — отделимое локально выпуклое пространство. Последовательность непустых замкнутых абсолютно выпуклых множеств $K_i \subset E$, $i = 1, 2, \ldots$, будем называть регулярной в $(E, \tau)$, если выполнены следующие условия:

1°) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i = E$;

2°) $K_i + K_i \subset K_{i+1}$ для любого $i$;

3°) если абсолютно выпуклое множество $V$ таково, что для любого $i$ пересечение $V \cap K_i$ является окрестностью нуля на $K_i$ в топологии, индуцированной $\tau$, то $V$ — окрестность нуля на $E$ в топологии $\tau$.

Будем говорить, что $(E, \tau)$ есть пространство типа DFM, если оно обладает регулярной последовательностью компактов. Всякое пространство вида $(F', b)$ ($(F, t)$ метризуемое, $b$ — топология предкомпактной сходимости) является пространством типа DFM. Это непосредственно следует из теоремы Банаха — Дьедонне ([11]), стр. 193. Обратно, всякое пространство типа DFM изоморфно некоторому $(F', k)$, где $(F, t)$ — пространство Фреше, $k$ — топология компактной сходимости.

Если $(F, t)$ — пространство Фреше — Монтеля, то сильное сопряженное $(F', \beta)$ будет типа DFM (сильная топология на $(F, t)'$ совпадает в этом случае с $b$). Легко показать, что любое пространство, представимое в виде счетного индуктивного предела нормированных пространств с вполне непрерывными вложениями (пространство типа LN* ([9])), изоморфно сильному сопряженному $(F', \beta)$, где $(F, t)$ — пространство Фреше — Монтеля. С другой стороны, имеются примеры пространств Фреше — Монтеля, подпространства и фактор-пространства которых не являются монтелевскими (([10]), стр. 108; ([11]), стр. 218). Эти пространства не будут типа M*, следовательно, их сильные сопряженные не относятся к типу LN*. В качестве примера DFM-пространства, не изоморфного сильному сопряженному к пространству Фреше — Монтеля, достаточно рассмотреть $(F', b)$, где $(F, t)$ нормируемо (и бесконечномерно).

В дальнейшем, рассматривая топологическое линейное пространство $(E, \tau)$, будем наделять $E$ естественной равномерностью $u_\tau$, сопоставляя с каждой окрестностью нуля $U$ окружение $\tilde{U}((x, y)) \in \tilde{U} \overset{\text{опр}}{=} x - y \in U)$.

Следующее утверждение является достаточно простым, и мы приводим его здесь без доказательств.

Лемма. *Пусть $(X, u)$ — равномерное пространство ($u$ — семейство окружений на $X \times X$), $\tau(u)$ — равномерная топология на $X$, порожденная $u$, $K \subset X$ — компакт и $o = \{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство открытых подмножеств $(X, \tau(u))$ такое, что $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} O_\alpha$.*

---

* В ([3]) ультраполные пространства названы суперполными (supercomplete).

*Тогда существует окружение $U \in u$ такое, что для любого $x \in K$ окрестность $U(x)$ содержится в некотором $O_\alpha$, $\alpha \in A$.*

Опираясь на это утверждение, приведем доказательство основного результата.

Теорема. *Если $(E, \tau)$ — пространство типа* DFM, *то соответствующее равномерное пространство $(E, u_\tau)$ ультраполно.*

Доказательство. Покажем, что в произвольное открытое покрытие пространства $(E, \tau)$ можно вписать покрытие из $\Phi(\omega, \omega)$, где $\omega$ — класс всех равномерных покрытий $(E, u_\tau)$. Тем самым утверждение будет доказано, поскольку, очевидно, $\Phi(\omega, \omega) \subset \bar{\omega}$.

Итак, пусть $o = \{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — произвольное открытое покрытие $(E, \tau)$ и $K_i$, $i = 1, 2, \ldots,$ — регулярная последовательность компактов. Для каждого индекса $i$ выберем, в соответствии с леммой, абсолютно выпуклую окрестность нуля $U_i$ такую, что если $x \in K_i$, то $x + U_i$ содержится в некотором $O_\alpha$. Выберем далее семейство абсолютно выпуклых окрестностей нуля $V_j$, $j = 1, 2, \ldots$, так, чтобы соблюдались условия $3V_1 \subset U_1$, $3V_2 \subset U_2 \cap \cap U_1, \ldots, 3V_n \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i, \ldots$ Пусть $V_i^j = V_j \cap K_i$, $i, j = 1, 2, \ldots$ Образуем последовательность абсолютно выпуклых множеств $W_1, W_2, \ldots, W_n$, полагая $W_1 = \Gamma[\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i^i], W_2 = \Gamma[\bigcup_{i=2}^{\infty} V_i^i], \ldots, W_n = \Gamma[\bigcup_{i=n}^{\infty} V_i^i], \ldots$ ($\Gamma[M]$ означает абсолютно выпуклую оболочку $M$).

Так как компакты $K_i$, $i = 1, 2, \ldots$, образуют регулярную последовательность, то все множества $W_n$ суть окрестности нуля в пространстве $(E, \tau)$. Кроме того, $3W_n \subset U_n$, $n = 1, 2, \ldots$, поскольку $3V_i \subset U_n$ при $n \leqslant i$, а значит, $3V_i^i \subset U_n$ при $n \leqslant i$.

Покажем, что имеют место соотношения $K_{n+1} + W_1 \subset K_n + W_n$, $n = 2, 3, \ldots$. Действительно, $W_1 = \Gamma[\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i^i] \subset \Gamma[\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i^i] + \Gamma[\bigcup_{i=n}^{\infty} V_i^i]$. Но $V_i^i \overset{\text{опр}}{=} K_i \cap V_i \subset K_i$. Следовательно, $\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i^i \subset K_{n-1}$ и $\Gamma[\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i^i] \subset K_{n-1}$, а стало быть, $K_{n-1} + \Gamma[\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i^i] \subset K_{n-1} + K_{n-1} + \Gamma[\bigcup_{i=n}^{\infty} V_i^i] \subset K_n + \Gamma[\bigcup_{i=n}^{\infty} V_i^i] = K_n + W_n$, что и требовалось доказать.

Перейдем непосредственно к доказательству утверждения $o \in \Phi(\omega, \omega)$ ($\omega$ — равномерный фильтр покрытий пространства $(E, u_\tau)$. Достаточно найти «основное» равномерное покрытие $w$ пространства $(E, u_\tau)$ и отображение $\xi$: $w \to \omega$ ($w \subset 2^E$, $\omega \subset 2^{2^E}$) такие, чтобы всякое непустое пересечение множеств $A \cap B$ ($A \in w$, $B \in \xi(A)$) содержалось в некотором $O_\alpha \in o$ ($o$ — исходное открытое покрытие пространства $(E, \tau)$).

Рассмотрим на $E$ последовательность равномерных покрытий $w_1 = \{x + W_1\}_{x \in E}$, $w_2 = \{x + W_2\}_{x \in E}, \ldots, w_n = \{x + W_n\}_{x \in E}, \ldots$ Возьмем покрытие $w_1$ в качестве основного. Отображение $\xi$: $w_1 \to \omega$ построим следующим образом: если $x \in K_1$, то $\xi(x + W_1)$ полагаем равным $w_1$; если $x \in K_2 \setminus K_1$, то $\xi(x + W_1)$ полагаем равным $w_3$; ...; если $x \in K_{n-1} \setminus K_{n-2}$, то $\xi(x + W_1)$ полагаем равным $w_n$; ...

Докажем, что любое непустое множество вида $(x + W_1) \cap (y + W_n)$, где $x \in K_{n-1}$, $n \geqslant 2$, содержится в некотором $O_\alpha$, $\alpha \in A$. При $n = 2$ это вытекает из построения окрестности нуля $W_1$, $W_1 \subset V_1 \subset U_1$. Пусть $n > 2$. Покажем, что справедливо более сильное утверждение. Именно, если множество $(K_{n-1} + W_1) \cap (y + W_n)$ непусто, то оно содержится в некотором $O_\alpha \in o$. Действительно, $K_{n-1} + W_1 \subset K_n + W_n$ (доказано выше), следовательно, $\emptyset \neq (K_{n-1} + W_1) \cap (y + W_n) \subset (K_n + W_n) \cap (y + W_n)$ и, стало быть, $y \in K_n + 2W_n$, т. е. имеется некоторый элемент $z \in K_n$ такой, что $y \in z + 2W_n$. Поэтому $y + W_n \subset z + 3W_n \subset z + U_n$, тем более $(K_n \cap W_n) \cap \cap (y + W_n) \subset z + U_n$. Но окрестность нуля $U_n$ была выбрана так, что при

$z \in K_n$ окрестность $z + U_n$ содержится в некотором $O_\alpha \in o$. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность проф. Д. А. Райкову за внимание к работе и ценные замечания.

Всесоюзный научно-исследовательский институт стандартизации
Государственного комитета стандартов
Совета Министров СССР
**Москва**

Поступило
29 V 1972

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. А. Райков, Studia math., **31**, 295 (1968). [2] О. Г. Смолянов, Изв. АН СССР, сер. матем., **35**, 3, 682 (1962). [3] J. R. Isbell, Pacific J. Math., **12**, 1, 287 (1962). [4] И. М. Дектярев, ДАН, 157, № 2 (1964). [5] Р. В. Плыкин, Докл. АН УзбССР, № 9 (1966). [6] В. П. Федорова, Матем. сборн., **76**, 4, 566 (1968). [7] И. А. Березанский, УМН, **20**, 2 (122), 167 (1965). [8] S. Ginsburg, J. R. Isbell, Trans. Am. Math. Soc., **93**, 145 (1959). [9] Себастьян-и-Сильва, Сборн. пер. Математика, **1**, 1, 60 (1957). [10] А. Гротендик, там же, **2**, 3, 81 (1958). [11] Х. Шефер, Топологические векторные пространства, М., 1971.