Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 4

УДК 519.2+519.1 МАТЕМАТИКА

Ю. Д. БУРТИН

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДИАМЕТРА И ЧИСЕЛ НЕЗАВИСИМОСТИ И ДОМИНИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО ГРАФА

(Представлено академиком Ю. В. Линником 26 VI 1972)

Изучению асимптотических свойств случайных графов посвящен целый ряд работ ([1-9]). В ([1-3]) равновероятно выбирался один из $\binom{\binom{n}{2}}{N}$ графов с n вершинами $P_1, \ldots, P_n$ и N ребрами (здесь и далее $\binom{n}{k}$ — число сочетаний из n по k). В ([4-6]) рассматривалась несколько иная, но близкая вероятностная схема: каждое ребро P_iP_j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, присутствует с вероятностью p и отсутствует с вероятностью $1-p$ независимо от остальных ребер. Мы будем придерживаться второго из этих определений случайного графа.

Удобно ([5], [6]) записать вероятность наличия ребра в виде $p = 1 - e^{-t}$, $0 \leqslant t < +\infty$. Соответствующий случайный граф обозначим $G_n(t)$. Параметр t естественно интерпретировать как время. Именно: пусть в нулевой момент времени между вершинами $P_1, \ldots, P_n$ нет ни одного ребра. Каждое из $\binom{n}{2}$ ребер возникает через случайное время с функцией распределения $1 - e^{-t}$ независимо от остальных ребер. Можно определить $G_n(t)$ как граф, состоящий из вершин $P_1, \ldots, P_n$ и ребер, появившихся до момента t. В ([1]) показано, что (все цитируемые результаты переведены на язык графа $G_n(t)$), если $t = \frac{\log n + x + o(1)}{n}$ при $n \to \infty$ ($\log n$ — натуральный логарифм n), то $\lim\limits_{n \to +\infty} P(G_n(t)\text{ связен}) = e^{-e^{-x}}$ и распределение числа компонент связности сходится к пуассоновскому распределению с параметром e^{-x}. Этот результат обобщается в ([8]) на случайные графы с различными вероятностями p_{ij} наличия ребер P_iP_j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$. В ([2], [5-7]) подробно исследована (согласно терминологии ([2])) «эволюция» случайного графа до наступления связности: изучены распределения числа компонент связности, величины наибольшей компоненты, числа циклов, деревьев и т. п. Строение «почти наверное» (т. е. с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to +\infty$ ([2])) связного случайного графа исследовалось в ([3], [9]).

В данной работе получены асимптотические оценки характеристик случайного графа, связанных с естественным обобщением понятий независимости и доминирования ([10]). Эти результаты позволяют, в частности, решить задачи построения асимптотических оценок диаметра, радиуса, чисел независимости и доминирования случайного графа, поставленные перед автором Б. Г. Питтелем. При доказательстве формулируемых ниже результатов использовался, как и в работах ([2], [3], [8]), критерий сходимости распределений сумм случайных логических переменных к пуассоновскому распределению, основанный на методе моментов.

Пусть G — неориентированный граф без петель и кратных ребер. Расстоянием $d(a, b, G)$ между вершинами a и b графа $G (a \neq b)$ называется ([10]) минимальное число ребер, образующих цепь с концами a и b. Если такой цепи не существует, то $d(a, b, G) = +\infty$; $d(a, a, G) = 0$. Пусть V — множество вершин графа. Диаметром графа называется величина $d(G) =$

$=\max\limits_{a,\,b\in V} d(a, b, G)$, радиус определяется равенством $r(G)=\min\limits_{a\in V}\max\limits_{b\in V} d(a, b, G)$. Подмножество I множества V будем называть r-независимым множеством графа G, если $\min d(a, b, G) > r$, $a, b\in I$, $a\neq b$. Числом r-независимости $\beta_r(G)$ графа G назовем наибольшее число вершин, образующих r-независимое множество. Если таких множеств нет, положим $\beta_r(G)=1$. Подмножество D множества V будем называть r-доминирующим множеством графа G, если $\max\limits_{b\notin D}\min\limits_{a\in D} d(a, b, G)\leqslant r$. Числом r-доминирования $\delta_r(G)$ графа G назовем минимальное число вершин, образующих r-доминирующее множество. Обозначим через $\nu_{r,s}(G)$, $\mu_{r,s}(G)$ соответственно число r-независимых и r-доминирующих s-элементных множеств графа G.

Теорема 1. *Пусть* $t=\left[n\left(\frac{2}{s-1}\log n+x+o(1)\right)\right]^{1/r}/n$ *при* $n\to+\infty$, $s=2,3,\ldots$, $r=1,2,\ldots$, $-\infty<x<+\infty$; *тогда*

$$\lim_{n\to+\infty} P(\nu_{r,s}(G_n(t))=j)=\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}, \tag{1}$$

где $\lambda=\frac{1}{s!}\exp\left[-x\binom{s}{2}\right]$.

Следствие 1.1. *В условиях теоремы* 1

$$\lim_{n\to+\infty} P(\beta_r(G_n(t))=s)=1-e^{-\lambda}, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(\beta_r(G_n(t))=s-1)=e^{-\lambda}. \tag{3}$$

Таким образом, если выполнены условия теоремы 1, то «почти наверное» либо в графе $G_n(t)$ нет r-независимых s-элементных множеств, но есть $(s-1)$-элементные (т. е. число r-независимости равно $s-1$), либо число r-независимости равно s. При $s=2$ из соотношения (1) следует, в частности, что $\lim\limits_{\to+\infty} P(\nu_{r,2}(G_n(t))=0)=\exp(-{}^1/_2 e^{-x})$. Однако $\nu_{r,2}(G_n(t))=0$ в том и только том случае, если $d(G_n(t))\leqslant r$. Следовательно, при $s=2$ утверждение теоремы 1 является по существу утверждением о диаметре случайного графа.

Следствие 1.2. *Пусть* $t=[n(2\log n+x+o(1))]^{1/r}/n$ *при* $n\to+\infty$, $r=1,2,\ldots$, $-\infty<x<+\infty$; *тогда*

$$\lim_{n\to+\infty} P(d(G_n(t))=r)=\exp(-{}^1/_2 e^{-x}), \tag{4}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(d(G_n(t))=r+1)=1-\exp(-{}^1/_2 e^{-x}). \tag{5}$$

Можно показать, что в условиях следствия 1.2 в графе $G_n(t)$ «почти наверное» не найдется такой вершины, которая находится на расстоянии, большем r, сразу от двух вершин. Таким образом, пары вершин графа, расстояние между которыми больше r, «почти наверное» не имеют общих вершин, и распределение числа этих пар сходится к распределению Пуассона с параметром ${}^1/_2 e^{-x}$.

Теорема 2. *Пусть* $t=\left[\frac{n}{s}(\log n-\log(s\log n-x+o(1)))\right]^{-1/r}/n$ *при* $n\to+\infty$, $s, r=1,2,\ldots$, $-\infty<x<+\infty$; *тогда*

$$\lim_{n\to+\infty} R(\mu_{r,s}(G_n(t))=j)=\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}, \tag{6}$$

где $\lambda=e^x/s!$

Следствие 2.1. *В условиях теоремы* 2

$$\lim_{n\to+\infty} P(\delta_r(G_n(t))=s+1)=e^{-\lambda}, \tag{7}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(\delta_r(G_n(t))=s)=1-e^{-\lambda}. \tag{8}$$

Отметим, что $\mu_{r,1}(G_n(t))=0$ в том и только том случае, если $r(G_n(t))>r$. Поэтому из теоремы 2 при $s=1$ можно вывести следующее утверждение о радиусе случайного графа.

Следствие 2.2. *Пусть* $t=[n(\log n-\log(\log n-x+o(1)))]^{1/r}/n$ *при* $n\to+\infty$, $r=1,2,\ldots,-\infty<x<+\infty$; *тогда*

$$\lim_{n\to+\infty} P(r(G_n(t))=r)=1-\exp(-e^x), \tag{9}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(r(G_n(t))=r+1)=\exp(-e^{-x}). \tag{10}$$

Теперь мы в состоянии (несколько нестрого) обрисовать картину эволюции во времени случайного графа с большим числом n вершин. В момент $t=0$ радиус и диаметр графа равны, очевидно, $+\infty$ (так как нет ни одного ребра). Пусть c_n — последовательность неотрицательных чисел, сколь угодно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $n\to+\infty$. В момент времени $t=\frac{\log n}{n}\left(1+o\left(\frac{c_n}{\log n}\right)\right)$ граф становится связным. В момент $t=\frac{(2n\log n)^{1/(r+1)}}{n}\left(1+o\left(\frac{c_n}{\log n}\right)\right)$ (при фиксированном r) диаметр графа становится равным $r+1$, при этом имеется огромное число вершин, находящихся каждая от каждой на расстоянии $r+1$. Максимальное число таких вершин становится равным s в момент $t=\frac{\left(\frac{2}{s}n\log n\right)^{1/r}}{n}\left(1+o\left(\frac{c_n}{\log n}\right)\right)$, причем «незадолго до этого» в момент

$$t=\frac{\left[\frac{n}{s}(\log n-\log\log n^s)\right]^{1/r}}{n}\left(1+o\left(\frac{c_n}{\log^2 n}\right)\right)$$

в графе впервые появляются s-элементные r-доминирующие множества. Наконец, радиус и диаметр становятся равными r соответственно в моменты времени $t=\frac{[n(\log n-\log\log n)]^{1/r}}{n}\left(1+o\left(\frac{c_n}{\log^2 n}\right)\right)$ и $t=\frac{(2n\log n)^{1/r}}{n}\left(1+o\left(\frac{c_n}{\log n}\right)\right)$. Заметим, что диаметр графа становится равным двум в момент времени $t=\sqrt{\frac{2\log n}{n}}\left(1+o\left(\frac{c_n}{\log n}\right)\right)$, после чего «очень большое» время $\Delta t=2\log n+o(c_n)$ требуется для того, чтобы диаметр стал равным единице, т. е. чтобы граф $G_n(t)$ стал полным.

В заключение приведем следующую вероятностную нижнюю оценку диаметра случайного графа при малых t.

Теорема 3. *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=+\infty$; *тогда*

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(d(G_n(t_n))\geqslant\frac{\log n-c_n}{\log(nt_n)}\right)=1. \tag{11}$$

Примечания. 1) Доказательство грубой оценки (11) существенно отличается от доказательств теорем 1, 2 и основано на значительно более простых соображениях, опирающихся фактически только на общую теорему о неотрицательности ковариации двух монотонных функций нескольких случайных логических переменных (([11]), глава 7, теорема 3.3). Используя эту теорему, можно показать, что если Γ — произвольное множество вершин графа $G_n(t)$, $b\notin\Gamma$, $a\neq b$, k — любое натуральное число, то имеет место неравенство $P(\min\limits_{g\in\Gamma} d(g,b,G_n(t))>k)\geqslant[P(d(a,b,G_n(t))>k)]^{|\Gamma|}$, которое служит ключом к доказательству теоремы 3.

2) Пусть $t_n=O\left(\frac{(2\log n)^{1/r}}{n}\right)$, $c_n=o(\log n)$ при $n\to+\infty$, $r>1$, тогда, согласно теореме 3, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(d(G_n(t))\geqslant r)=1$.

Итак, теорема 3 позволяет получить оценку снизу первого момента времени t, когда $d(G_n(t)) = r$, совпадающую по порядку с точной асимптотической оценкой следствия 1.2.

Автор глубоко благодарен Б. Г. Питтелю за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ленинградское отделение
Центрального экономико-математического института
Академии наук СССР

Поступило
16 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Erdös, A. Rényi, On Random Graphs 1, Debrecen, 6, 1959. [2] P. Erdös, A. Rényi, Magyar tud. akad. Mat. Kutató Inst. közl, A5, 1—2 (1960). [3] P. Erdös, A. Rényi, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 12 (1961). [4] В. Е. Степанов, Теория вероятностей и ее применения, **14**, № 3 (1969). [5] В. Е. Степанов, там же, **15**, № 1 (1970). [6] В. Е. Степанов, там же, **15**, № 2 (1970). [7] В. Е. Степанов, там же, **17**, № 2 (1972). [8] И. Н. Коваленко, Кибернетика, № 4 (1971). [9] А. К. Кельманс, Теория вероятностей и ее применения, **17**, № 2 (1972). [10] О. Оре, Теория графов, «Наука», 1968. [11] Р. Барлоу, Ф. Прошан, Математическая теория надежности, М., 1969.