Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 4

УДК 513.812 *МАТЕМАТИКА*

А. К. ГУЦ

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ СЕМЕЙСТВ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 21 VI 1972)

Пусть $Л^n$ — n-мерное пространство Лобачевского, $n \geqslant 2$, M — некоторое множество в $Л^n$ и $T(Л^n)$ — некоторая транзитивная подгруппа группы движений. Пусть $f: Л^n \to Л^n$ — биективное отображение, обладающее следующим свойством. Образ всякого множества $t(M)$, получаемого из M с помощью элемента t группы $T(Л^n)$, есть множество $t'(M)$, где t' — также элемент группы $T(Л^n)$.

Спрашивается: каким должно быть множество M, чтобы отображение f было движением?

Для формулировки наших результатов введем некоторые определения.

Пусть $L \equiv \{l(X): X \in Л^n\}$ обозначает семейство всевозможных прямых параллельных в некотором заданном направлении, причем через $l(X)$ обозначена прямая, проходящая через точку X; и так обозначаются только прямые семейства L.

Пусть O — фиксированная точка в пространстве.

Назовем множество, получаемое вращением вокруг прямой $l(O)$, соответственно прямой, орицикла, эквидистанты, проходящей через точку O под углом α, $0 \leqslant \alpha < \pi/2$, к прямой $l(O)$ и лежащей в двумерной плоскости, проходящей через прямую $l(O)$, соответственно конусом $(\alpha \neq 0)$, ориконусом, эквиконусом.

Пусть $L_k \equiv \{l_k(X): X \in Л^n\}$, $k = 1, \ldots, n+1$, — семейство прямых такое, что прямая $l_k(X)$ проходит через точку X под углом α_k к прямой $l(X)$ семейства L. Причем предположим, что прямые $l_1(X), \ldots, l_{n+1}(X)$ таковы, что никакие n из них не лежат в одной гиперплоскости. Значит, имеем $(n+1)$ различных семейств прямых, причем случай, когда одно из них совпадает с семейством L, не исключается.

Полагаем

$$D(X) = \bigcup_{k=1}^{n+1} l_k(X).$$

Псевдоцентром гиперсферы $S(X, r)$ радиуса $r > 0$ и с центром в точке X называется точка Y, отстоящая от точки X на прямой $l(X)$ в направлении параллельности прямых данного семейства на расстоянии $k \ln \operatorname{sh}(r/k)$, где k — константа, отвечающая геометрии Лобачевского. Сферу $S(X, r)$ с псевдоцентром Y обозначим через $\Sigma(Y, r)$.

С помощью семейства L можно ввести орициклические координаты в пространстве $Л^n$, причем метрика в них задается в виде

$$d\sigma^2 = dy^{1^2} + \exp\left(-\frac{2y^1}{k}\right) \cdot \sum_{i=2}^{n} dy^{i^2}.$$

Пусть $T(Л^n)$ — транзитивная подгруппа группы движений, элементы которой задаются следующим образом:

$$t: (x^1, \ldots, x^n) \to (\lambda(t)x^1,\ \lambda(t)x^2 + \alpha^2(t), \ldots, \lambda(t)x^n + \alpha^n(t)),$$
$$x^1 = \exp(y^1/k), \quad x^i = y^i/k, \quad i = 2, \ldots, n,$$

где $t \in T(Л^n)$, а $\lambda(t)$, $\alpha^2(t), \ldots, \alpha^n(t)$ — числа, зависящие от самого элемента t.

Тогда, если $C(O)$ есть некоторое множество с отмеченной точкой O, мы можем рассматривать семейство множеств

$$\{C(X) \colon X \in Л^n\} \equiv T(Л^n)C(O),$$

т. е. $C(X)$ есть образ множества $C(O)$ при отображении t, являющегося элементом группы $T(Л^n)$, если образом точки O является точка X.

Теорема 1. *Пусть $Л^n$, $n \geqslant 2$,— n-мерное пространство Лобачевского и $f\colon Л^n \to Л^n$ — биективное отображение такое, что*

$$f[C(X)] = C[f(X)],$$

где $\{C(X) \colon X \in Л^n\}$ — некоторое семейство множеств, построенное указанным выше способом.

Отображение f будет движением, если множество $C(O)$ есть одно из следующих: конус (здесь $n > 2$), ориконус, эквиконус ($n > 2$), гиперсфера, множество $\Sigma(O, r)$, множество $D(O)$.

Заметим, что в случае, когда эквиконус $C(O)$ таков, что гиперорисфера, ортогональная к прямой $l(O)$ в точке O, имеет пересечение с $C(O)$, состоящее лишь из точки O, имеющееся доказательство использует условие непрерывности отображения, хотя, как нам кажется, оно излишне. Как раз этот случай важен при построении теории относительности в мире де Ситтера.

Случай гиперсферы или множества $\Sigma(O, r)$ дает ответ на вопрос: каковы же физические движения, при которых определенного рода наблюдения тождественны в мире с метрикой

$$ds^2 = c^2\,dt^2 + \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}(y^1, y^2, y^3)\,dy^i\,dy^k$$

в случаях, когда фронт распространения света в 3-пространстве изображается в пространстве Лобачевского сферой или множеством $\Sigma(X, r)$.

Теорема 2. *Пусть $f\colon Л^n \to Л^n$, $n \geqslant 2$,— биективное отображение, которое любой орицикл отображает на орицикл.*

Тогда f есть движение.

Доказательства указанных теорем довольно длинны и не могут быть приведены здесь. Основная идея заключается в том, чтобы, используя модель Пуанкаре, продолжить отображение f на все эвклидово пространство и показать, что оно будет сохранять семейство эвклидовых конусов. Затем, применяя ([1]), показываем, что отображение f в модели Пуанкаре есть композиция определенного рода инверсий и симметрий, т. е. является движением.

В случае, если рассматривать сепарабельное гильбертово пространство, причем вместо движений брать аффинные отображения, то теорема 1 верна за исключением случая, когда рассматривается множество $D(O)$. Однако можно построить обобщение множества $D(O)$, и теорема будет верной лишь в случае непрерывности отображения. В случае конуса результат известен давно: это известная теорема А. Д. Александрова и В. В. Овчинниковой ([1]), работой которых было положено начало подобного рода исследованиям.

В заключение автор выражает благодарность акад. А. Д. Александрову, которому он обязан выбором данной темы.

Новосибирский государственный университет

Поступило 6 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров, В. В. Овчинников, Вестн. Ленингр. унив., в. 2, 95 (1953).