Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 5

УДК 532.546

ГИДРОМЕХАНИКА

Л. М. КОТЛЯР, Э. В. СКВОРЦОВ

О ФИЛЬТРАЦИИ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ К СТОКУ В КРИВОЛИНЕЙНОМ ПЛАСТЕ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 19 V 1972)

Рассматривается плоская стационарная фильтрация вязко-пластичной жидкости (в.п.ж.) в однородном и изотропном пласте. В работе [1] с целью приближения к реально существующим законам фильтрации в.п.ж. предложен следующий разрывной закон:

$$\bar{v}=0,\ |\nabla p|<\tau_0;\quad \bar{v}=-(k/\mu)\nabla p,\ |\nabla p|\geqslant\tau_0;\quad \bar{v}_0=k\tau_0/\mu. \tag{1}$$

Здесь $\bar{v}$ — скорость фильтрации, $v=|\bar{v}|$, ∇p — градиент давления, k — коэффициент проницаемости, μ — вязкость, τ_0 — начальный градиент.

Согласно (1), в пласте, в областях, где $|\nabla p|<\tau_0$, возникают застойные зоны, на границах которых $v=v_0$; вне этих границ фильтрация следует линейному закону. Для определения положения неизвестных границ в [1], а затем в [2] при решении конкретных задач были использованы методы теории струй. В указанных работах изучались такие задачи, для которых границы области (пласта) прямолинейны. Представляет интерес рассмотреть случай криволинейной границы области. В качестве характерной избрана задача о фильтрации в.п.ж. к стоку в области, ограниченной кривой, кривизна которой конечна. Показано, что задача сводится к решению интегро-дифференциального уравнения Вилля.

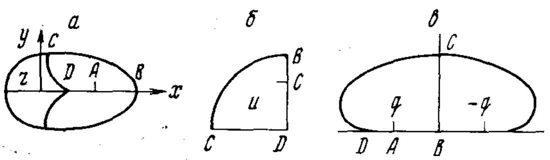

Рис. 1. Геометрическая схема задачи

1. Рассмотрим потенциальное течение жидкости в области, ограниченной симметричной относительно оси x кривой Γ, на которой потенциал скорости постоянен, к стоку с расходом q, расположенному на оси x в точке A на расстоянии r от Γ (рис. 1*а*) (в силу симметрии достаточно рассмотреть верхнюю половину области). Начало координат выбирается в центре кривизны кривой в точке B. На свободной границе CD модуль скорости постоянен и равен V_0.

Для решения задачи введем вспомогательную переменную $u=s+it$, изменяющуюся в четверти единичного круга $|u|\leqslant 1$, $\operatorname{Im} u\geqslant 0$, $\operatorname{Re} u\leqslant 0$ (рис. 1*б*), и будем искать функцию $z(u)$, отображающую область изменения u на область течения $z=x+iy$ с соответствием точек, указанным на рис. 1. Комплексный потенциал течения $w(u)$ легко строится по особым точкам:

$$w(u)=\frac{q}{\pi}\ln\frac{u^2+a^2}{1+u^2a^2}, \tag{1,1}$$

где a — координата точки A в плоскости переменного u. Следуя Леви — Чивита [3], представим комплексную скорость течения в виде

$$\chi(u)=\frac{1}{v_0}\frac{dw}{dz}=\frac{v}{v_0}e^{-i\theta}=\chi_0(u)\,e^{-i\Omega(u)}, \tag{1,2}$$

где θ — угол, образованный вектором скорости с осью x,

$$\chi_0(u) = \frac{(u + ia)(u + i/a)}{(u - ia)(u - i/a)}$$

есть комплексная скорость течения по схеме, изображенной на рис. 1*в*, $\Omega(u) = \nu + i\tau$ — голоморфная в области изменения u функция. Так как на линии DC $|\chi(u)| = 1$, то $\operatorname{Im}\Omega(u)|_{u=s} = \tau(s, 0) = 0$. На прямой DB $\arg\chi(u) = \arg\chi_0(u)$ и, следовательно, $\operatorname{Re}\Omega(u)|_{u=it} = \nu(0, t) = 0$. По принципу симметрии Шварца функцию $\Omega(u)$ можно аналитически продолжить и отыскивать регулярную внутри круга единичного радиуса функцию, которая представима в виде ряда

$$\Omega(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n, \tag{1,3}$$

где коэффициенты $c_{2k} = 0$ в силу симметрии относительно мнимой оси.

Формулы (1,1) и (1,2) позволяют найти решение поставленной задачи, если известна функция $\Omega(u)$ и параметр a. Из (1,1) и (1,2) имеем

$$dz = \frac{2q(1-a^4)}{\pi v_0} \frac{u \exp[i\Omega(u)]\,du}{(u+ia)^2(ua+i)^2}. \tag{1,4}$$

Течение по схеме рис. 1*а* определяется заданием безразмерного параметра $Q = q / (v_0 R)$ и определяющей параметр a величины

$$\frac{r}{R} = M \int_a^1 \frac{t \exp[i\Omega(it)]\,dt}{(t+a)^2(at+1)^2} = M\rho, \tag{1,5}$$

где $M = -2Q(1-a^4) / \pi$, R — радиус кривизны Γ в точке B.

Выведем граничное условие для неизвестной функции $\Omega(u)$ на дуге BC. Угол между осью x и касательной к дуге, положительное направление которой выбирается так, чтобы поток оставался слева, $\gamma = \theta - \pi / 2$ и, следовательно, при $u = e^{i\sigma}$

$$\frac{d\gamma}{d\sigma} = \frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma}(\arg\chi(u)|_{u=e^{i\sigma}}) = \frac{d\nu}{d\sigma}. \tag{1,6}$$

Вводя кривизну дуги BC $K(\theta) = -d\gamma / dl$ (l — длина дуги, отсчитываемая от точки B), найдем

$$K(\theta) = -\frac{d\theta}{dl} = -\frac{d\theta}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dl}. \tag{1,7}$$

Учитывая (1,4), (1,6) и (1,7), получим уравнение, связывающее вещественную и мнимую части функции $\Omega(u)$ на дуге BC:

$$d\nu / d\sigma = -M\varkappa(\theta) e^{-\tau(\sigma)} f(\sigma), \tag{1,8}$$

где $\varkappa(\theta) = RK(\theta)$ есть безразмерная кривизна дуги Γ, $f(\sigma) = (1 + 2a\sin\sigma + a^2)^{-2}$.

Следуя [4], введем функцию $\lambda(\sigma) = -d\nu / d\sigma$ и операторы $D\lambda$ и $J\lambda$ по формулам

$$D\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \lambda(\sigma_0) \ln\left|\frac{\sin {}^1\!/_2(\sigma_0 - \sigma)}{\sin {}^1\!/_2(\sigma_0 + \sigma)}\right| d\sigma_0 = \tau(\sigma),$$

$$J\lambda = \int_{\sigma}^{\pi/2} \lambda(\sigma_0)\,d\sigma_0 = \nu(\sigma).$$

Тогда уравнение (1,8) запишется в виде

$$\lambda = Mf(\sigma)\varkappa(J\lambda)e^{-D\lambda}. \tag{1,9}$$

Последнее уравнение есть уравнение Вилля [4].

В исследуемой задаче вместо параметра Q можно задавать длину дуги CB (контура питания пласта). Тогда, если ввести, по аналогии со

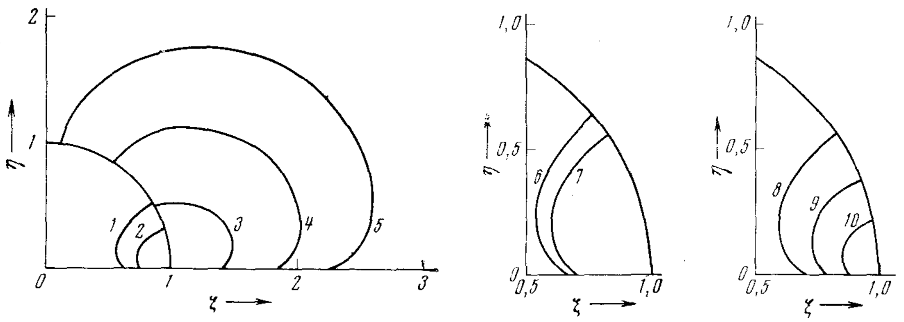

Рис. 2. Границы застойных зон при различных значениях a и r/R:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a			0,3			0,9			1	
r/R	0,25	0,15	−0,25	−0,5	−0,75	0,03	0,025			
Q	0,8746	0,5785	1,335	3,146	5,455	11,57	10,27			
$m/\pi v_0 R$								0,3	0,5	0,7

струйными течениями, угловой размер дуги (препятствия), который определяется углом поворота касательной при обходе дуги, для рассматриваемой задачи будут справедливы следующие

Теоремы [4]:

а) *для любой выпуклой симметричной дуги существует единственное течение для каждого заданного безразмерного параметра расхода* Q;

б) *для любой вогнутой симметричной дуги существует единственное течение для каждой заданной длины дуги с угловым размером меньше* π.

Решение рассматриваемой задачи соответствует решению задачи о фильтрации в.п.ж. по закону (1), для которого v_0 — минимум модуля скорости в области течения, при выполнении условия

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}(2k+1) \geqslant -4a/(1+a^2). \tag{1,10}$$

Последнее является следствием условия знакопостоянства кривизны кривой CD.

2. Для решения уравнения Вилля (1,9) используем метод, предложенный в [5] при исследовании струйной задачи о течении тяжелой жидкости. Учитывая представление функции $\Omega(u)$ в виде ряда (1,3), получим из (1,9)

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}(2k+1)\sin(2k+1)\sigma = \mathrm{M}\varkappa(\theta) f(\sigma) \exp\left[-\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}\cos(2k+1)\sigma\right]. \tag{2,1}$$

Отсюда найдем коэффициенты c_{2k+1}:

$$c_{2k+1} = \frac{2\mathrm{M}}{(2k+1)\pi}\int_0^{\pi} \varkappa(\theta) f(\sigma)\exp\left[-\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}\cos(2k+1)\sigma\right]\sin(2k+1)\sigma\, d\sigma. \tag{2,2}$$

Задавая Q и r/R, из системы уравнений (2,2) и (1,5) методом итераций можно определить неизвестные коэффициенты c_{2k+1} и параметр a. Практически удобнее задавать a и r/R, исключив из (2,2) и (1,5) величину М и определить затем Q по формуле $Q = \pi r/(2R\rho(1-a^4))$. Координаты границы застойной зоны $\zeta = z/R$ найдем из формулы (1,4) при $u = s$:

$$\zeta = \xi_0 + IM, \tag{2,3}$$

$$I = \int\limits_0^s \frac{u\{f_3(u)\sin f_1(u) - f_2(u)\cos f_2(u) + i\,[f_2(u)\sin f_1(u) + f_3(u)\cos f_1(u)]\}\,du}{(u^2+a^2)^2(1+u^2a^2)^2},$$

где

$$\xi_0 = x_0/R = 1 - M\int\limits_0^1 \frac{u\exp f_0(u)\,du}{(u+a)^2(1+ua)^2}, \tag{2,4}$$

x_0 — абсцисса точки D;

$$f_0(u = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}u^{2k+1}, \qquad f_1(u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}u^{2k},$$

$$f_2(u) = a^2(u^2-1)^2 - (a^2-1)^2u^2, \qquad f_3(u) = 2au(1-u^2)(1+a^2).$$

Согласно (2,3), безразмерная длина границы застойной зоны CD

$$S = L/R = \frac{2Q}{\pi}\ln\frac{1}{a}, \tag{2,5}$$

где L — длина дуги CD.

В пределе при $a=1$ точка A сольется с точкой B, в которой будет расположен диполь. Зная момент диполя m, по формулам (2,2)—(2,4) при $a=1$ можно найти координаты границы застойной зоны; длина границы $S = m/(\pi v_0 R)$.

При $a=0$ получим течение в канале с параллельными стенками шириной q/v_0, при этом линия CB переходит в прямую, перпендикулярную сторонам канала.

Для случая, когда кривая Г есть дуга окружности ($\varkappa(\theta)=1$), с учетом условия (1,7) проведены расчеты, некоторые результаты которых представлены на рис. 2.

Авторы выражают благодарность В. М. Ентову за полезные замечания.

Научно-исследовательский институт
математики и механики им. Н. Г. Чеботарева
при Казанском государственном университете
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
15 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Алишаев, Г. Г. Вахитов и др., Изв. АН СССР, Мех. жидкости и газа, № 3, 166 (1966). [2] М. Г. Алишаев, В сборн. Теория и практика добычи нефти, М., 1968, стр. 202. [3] T. Levi-Civita, Rend. cir. math. Palermo, 23, № 1, 1 (1907). [4] G. Birkhoff, E. H. Zarantonello, Jets, Wakes and Cavities, N.Y., 1957. [5] C. Lenau, R. Street, J. Fluid, Mech., 21, № 2, 257 (1965).