Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 6

УДК 513.838+530.145 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

М. И. МОНАСТЫРСКИЙ, А. М. ПЕРЕЛОМОВ

КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ОГРАНИЧЕННЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком Я. Б. Зельдовичем 4 IV 1972)

1. Последнее время в ряде задач квантовой механики, квантовой оптики и радиофизики, дуальных моделях вместо обычно используемого полного ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве состояний оказалось удобным работать с сверхполными системами [1]. Впервые такие системы, получившие название когерентных состояний, были рассмотрены в работе [2]. В работе [3] предложен способ построения когерентных состояний для произвольной группы G, обобщающий обычное понятие когерентных состояний.

Так как система когерентных состояний является сверхполной, то встает вопрос о выделении полных подсистем. Этот вопрос естественно связан с изучением дискретных подгрупп группы G. Для некоторых нильпотентных групп и группы движений плоскости Лобачевского $SU(1,1)$ этот вопрос рассматривался в работах [4].

В настоящей работе построена система когерентных состояний для групп движений эрмитовых симметрических пространств. Оказывается, что когерентные состояния выражаются через обобщенные ядра Бергмана этих пространств. Это дает возможность построить систему когерентных состояний для любых комплексных однородных ограниченных областей. Для дискретных подгрупп группы G с компактной фундаментальной областью исследован вопрос о возможности выделения полных подсистем.

Когерентные состояния, построенные в данной работе, представляют несомненный физический интерес. Они естественно возникают в задаче о рождении пар частиц в переменном внешнем поле [5].

2. Пусть G — связная полупростая вещественная группа с конечным центром, K — максимальная компактная подгруппа. Из теории Хариш-Чандры следует, что группа G имеет представление дискретной серии тогда и только тогда, когда в G существует компактная картановская подгруппа. Комбинируя эту теорему с результатами Э. Картана о строении однородных пространств $D = G / K$, допускающих комплексную структуру, мы получаем следующий результат.

Предложение. *Единственными неприводимыми эрмитовыми симметрическими пространствами некомпактного типа являются пространства*

$$D_{\mathrm{I}} = SU(p, q) / SU(p) \times U(1) \times SU(q), \quad D_{\mathrm{II}} = Sp(p, R) / U(p),$$
$$D_{\mathrm{III}} = SO^*(2p) / U(p), \quad D_{\mathrm{IV}} = SO_0(p, 2) / SO(p) \times SO(2). \qquad (1)$$

Кроме этих серий существуют еще два пространства, соответствующие двум особым группам Ли E_6 и E_7. Здесь $SO^*(2p)$ — подгруппа в $SO(2n, c)$, сохраняющая форму: $-z_1\bar{z}_{n+1} + z_{n+1}\bar{z}_1 - \ldots - z_n\bar{z}_{2n} + z_{2n}\bar{z}_n$; $SO_0(p, q)$ — связная компонента единицы группы $SO(p, q)$. Остальные обозначения стандартные.

В данной заметке мы ограничимся рассмотрением только таких представлений, которые могут быть реализованы в пространстве F аналитических функций на D с конечной нормой. Для этого необходимо и достаточно выполнения условия, полученного Хариш-Чандрой в ([7]): $(\lambda+\rho, \alpha) < 0$, где λ — старший вес представления группы G, ρ — полусумма положительных корней $\mathfrak{g}_c$ ($\mathfrak{g}_c$ — комплексификация алгебры Ли группы G), α — любой некомпактный положительный корень, (λ, α) — скалярное произведение в пространстве корней.

Тогда формальная степень представления может быть выражена через корни алгебры $\mathfrak{g}_c$:

$$d_T = \left| \prod_{\alpha\in R_+} \frac{(\lambda+\rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)} \right|, \tag{2}$$

где R_+ — множество всех положительных корней.

Теперь введем систему когерентных состояний на D, следуя работе ([3]). Пусть T_g^k — преобразование в пространстве F; T_g^k: $\psi(z) \to [J_g(z)]^k \psi(z\cdot g)$, где $g\in G$, $\psi(z)\in F$, $z\in D$ и $J_g(z)$ — якобиан преобразования $z\cdot g$ в точке z, k — целое, положительное число. Очевидно, что это преобразование задает представление группы G. Введем норму в пространстве представления F_k: $\|\psi\|_k^2 = \int\limits_D |\psi(z)|^2 d\mu_k(z)$. Из условия унитарности представления T^k с необходимостью получаем $d\mu_k(z) = [\rho(z, \bar z)]^{-k} d\mu(z)$, где $d\mu(z)$ — элемент инвариантного объема, а $\rho(z, \bar z)$ определяется из условия $d\mu(z) = \rho(z, \bar z) \prod dx\, dy$, $\rho(0, 0) = 1$.

В пространстве представления существует вектор старшего веса $\psi_0 \equiv 1$. Тогда множество $\{\psi_g\}$, где $\psi_g = T_g^k\psi_0 = [J_g(z)]^k$, образует систему когерентных состояний в F_k. Нетрудно видеть, что $\psi_{g_1} = e^{i\alpha}\psi_{g_2}$ тогда и только тогда, когда $g_1 = g_2 h$, где $h\in H$ (H — стационарная группа вектора ψ_0; подробности см. в ([3])). Поэтому каждое состояние определяется точкой $\zeta\in D$, $\psi_g = e^{i\alpha}\psi_\zeta$ и выбор ψ_ζ определяет сечение в одномерном расслоении с базой D и слоем — окружность.

Используя реализацию классических областей, данную Э. Картаном, явные формулы для якобианов и теорему о строении произвольных некомпактных эрмитовых симметрических областей, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Система когерентных состояний на ограниченной эрмитово симметрической области имеет вид* $\{\psi_\zeta\}$, $\psi_\zeta(z) = [B(\zeta^+, \zeta)]^{-k/2} \times [B(\zeta^+, z)]^k$, *где* ζ^+ — *элемент, эрмитово сопряженный* ζ, *а* $B(\zeta^+, z)$ — *обычное ядро Бергмана области* D.

Определим обобщенное ядро Бергмана согласно формуле

$$B_k(\zeta^+, z) = N_k[B(\zeta^+, \zeta)B(z^+, z)]^{(1-k)/2}B(\zeta^+, z)^k. \tag{3}$$

Можно показать, что оно является «воспроизводящим ядром», т. е. справедливо соотношение

$$\int\limits_D B_k(\zeta^+, z)\, B_k(z^+, \zeta_1) \Pi dx\, dy = B_k(\zeta^+, \zeta_1). \tag{4}$$

Мы не будем здесь приводить явные формулы для обобщенных ядер Бергмана классических областей, а дадим некоторое применение этих результатов к вопросу о выборе нормировки в формуле Хариш-Чандры для формальной степени представления (2).

Пусть P_ζ — проекционный оператор на вектор ψ_ζ. Рассмотрим интеграл $\int\limits_D P_\zeta\, d\mu(\zeta)$, где $d\mu(\zeta)$ — инвариантная мера на D. Из леммы Шура и инвариантности меры получаем

$$\int P_\zeta\, d\mu(\zeta) = c_k I \tag{5}$$

(I — единичный оператор).

Используя соотношения ортогональности, разложение меры $dg = dk\, d\mu$ (где dg — инвариантная мера на G, dk — инвариантная мера на K), получаем $c_k = \int |\langle\psi_0, \psi_\zeta\rangle|^2 d\mu(\zeta) = c / d_T$. Нормируем меру $d\mu_k{}^0(z) = N_k\, d\mu_k(z)$ на единицу. Тогда нетрудно показать, что

$$c_k = v_E(D) / d_T, \qquad N_k = d_T N_1, \qquad N_1 = 1 / v_E(D), \tag{6}$$

где $v_E(D)$ — эвклидов объем области D.

3. Пусть Γ — дискретная подгруппа группы G, действующая на D без неподвижных точек, и пространство $\Gamma \setminus D$ компактно. Рассмотрим множество точек $\zeta_n \in D$, $\zeta_n = \gamma_n \zeta_0$. Здесь ζ_0 — некоторая фиксированная точка в D, а γ_n — преобразование из группы Γ. Этому множеству точек соответствует подсистема когерентных состояний $\{\psi_{\zeta_n}\}$.

Ответ на вопрос о неполноте этой системы дается следующим предложением.

Предложение. *Система состояний $\{\psi_{\zeta_n}\}$ не полна в том и только том случае, если существует аналитическая функция $\psi(\zeta) \in F_k$, $\psi(\zeta) \neq 0$ такая, что $\psi(\zeta_n) = 0$.*

Построим функцию, удовлетворяющую условию $\psi(\zeta_n) = 0$. Пусть $\psi(\zeta)$ — автоморфная форма, относительно группы Γ, имеющая нуль в точке ζ_0. Этого можно добиться, если существуют две автоморфные формы одинакового веса: $\psi(\zeta) = c_1\psi_1(\zeta) + c_2\psi_2(\zeta)$. Для этого достаточно, чтобы размерность пространства автоморфных форм данного веса была $\geqslant 2$. В нашем случае размерность пространства автоморфных форм вычислена в работе [7]. Из этих формул следует, что $\dim H^0(D, \Gamma, m) \geqslant 2$ при $m \geqslant 2$, $\dim H^0(D, \Gamma, 1) = g_n$.

Здесь $H^0(D, \Gamma, m)$ — пространство автоморфных форм веса m, g_n — размерность пространства голоморфных дифференциалов степени n. Таким образом, нам нужно лишь выяснить, когда функция $\psi(\zeta)$ может принадлежать пространству F_k. Окончательный результат дается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть m_0 — наименьшее m, при котором $\dim H^0(D, \Gamma, m) \geqslant 2$; тогда при $k \geqslant m_0 + 1$ система когерентных состояний $\{\psi_{\zeta_n}\}$ неполна.*

Заметим, что m_0 может принимать лишь два значения: $m_0 = 1$ и $m_0 = 2$.

Институт теоретической и экспериментальной физики
Москва

Поступило
4 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Клаудер, Э. Сударшан, Основы квантовой оптики, М., 1970. [2] R. J. Glauber, Phys. Rev., 130, 2529 (1963); 131, 2766 (1963). [3] A. M. Perelomov, Comm. Math. Phys., 26 (1972). [4] А. М. Переломов, Теоретич. и матем. физ., 6, 213 (1971); Функциональный анализ и его приложения, 6, № 4 (1972). [5] A. M. Perelomov, Phys. Lett., in press. [6] Harish-Chandra, Am. J. Math., 77, 743 (1955); 78, 1, 564 (1956). [7] F. Hirzebruch, Topological Methods in Algebraic Geometry, N. Y., 1966.