Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 4

УДК 531.51 **ФИЗИКА**

А. Л. ЗЕЛЬМАНОВ

КИНЕМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ И ИХ ОТНОШЕНИЕ К ХРОНОМЕТРИЧЕСКИМ ИНВАРИАНТАМ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

(Представлено академиком В. А. Фоком 27 XII 1972)

1. Для хронометрических инвариантов существен фиксированный выбор линий времени ($x^i = \text{const}$, $i = 1, 2, 3$), иначе говоря, системы отсчета, тогда как выбор пространственных сечений ($x^0 = \text{const}$) остается произвольным ([1], [2]). Однако при рассмотрении некоторых вопросов, напротив, существен фиксированный выбор пространственных сечений, тогда как выбор линий времени остается произвольным. Если выбор пространственных сечений фиксирован, допустимы лишь преобразования $\tilde{x}^0 = \tilde{x}^0(x^0)$, $\partial\tilde{x}^0 / \partial x^i = 0$, $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^0, x^1, x^2, x^3)$. В этом случае математически удобны величины, преобразующиеся по формулам, не содержащим коэффициентов $\partial\tilde{x}^\alpha / \partial x^0$ или их производных (будем говорить: кинеметрически инвариантные (к.и.)), и ковариантные по отношению к преобразованиям $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^0, x^1, x^2, x^3)$, в которых x^0 рассматривается как параметр (греческие значки пробегают значения 0, 1, 2, 3, латинские — лишь 1, 2, 3). Эти величины можно рассматривать как трехмерные тензоры, в частности, как тензоры в трехмерном пространстве сечений (см. п. 2). К.и. величины целесообразно применять, например, в теории пространственно-однородных метрик, в задаче Коши и в гамильтоновом формализме.

Условимся, что все x^α вещественны, $x^0 = ct$, $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, в локальных галилеевых координатах $ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$, что все $g_{\mu\nu}$ и другие дифференцируемые величины непрерывны по x^α вместе с первыми и вторыми производными по ним и что $g^{00} \neq 0$, $g \neq 0$, где $g = |g_{\mu\nu}|$. Говоря о трехмерных тензорах, будем опускать упоминание о числе измерений.

2. Пусть $Q^{00\ldots0}_{ik\ldots p}$ — составляющие мирового тензора ранга n, все нижние значки которых отличны от нуля, а все верхние, числом m, нули. Тогда величины $T_{ik\ldots p} = (g^{00})^{-m/2}Q^{00\ldots0}_{ik\ldots p}$ образуют ковариантный тензор ранга $n - m$, кинеметрически инвариантный. Для к.и. метрических тензоров h_{ik} и h^{ik}, фундаментального определителя $h = |h_{ik}|$ и элементарной длины du находим

$$h_{ik} = -g_{ik},\quad h^{ik} = -g^{ik} + g^{0i}g^{0k}(g^{00})^{-1};$$

$$h = -gg^{00};\quad du^2 = h_{ik}\,{}^{\smile}dx^i\,{}^{\smile}dx^k = h^{ik}\,{}^{\smile}dx_i\,{}^{\smile}dx_k,$$

$${}^{\smile}dx_i = -g_{i\alpha}dx^\alpha,\quad {}^{\smile}dx^i = dx^i - g^{0i}(g^{00})^{-1}dx^0.$$

Пространство, определяемое найденным выражением для du, будем называть **пространством сечений**. Оно при любых значениях x^0 совпадает с пространственными сечениями ($x^0 = \text{const}$), причем мировые линии его точек ($dx^i = 0$) всюду ортогональны к этим сечениям. Систему отсчета, для которой те же линии служат линиями времени, будем называть **нормальной**. Ее пространство отсчета совпадает с пространством сечений. Очевидно, ${}^{\smile}dx^i$, в отличие от dx^i, к.и., но в любой системе отсчета, отличной от нормальной, неинтегрируемы. При этом координаты x^i фиксированных точек пространства зависят от времени.

Для к.и. элементарного промежутка времени $d\tau$ имеем $cd\tau = (g^{00})^{-1/2}dx^0$. Очевидно, $ds^2 = c^2d\tau^2 - du^2$. Для к.и. скорости движения точки v^i относительно данного пространства сечений находим $v^i = {}^{\smile}dx^i / d\tau$. Переменность координат x^i фиксированных точек пространства сечений в какой-либо системе отсчета можно рассматривать как следствие ее движения относительно этого пространства со скоростью $v^i = -cg^{0i}(g^{00})^{-1/2}$.

3. К.и. (т. е. не нарушающие кинеметрической инвариантности дифференцируемых величин) дифференциальные операторы будем отмечать так же (дугой), как и к.и. обобщение дифференциалов координат. Оператор $\partial / \partial x^i$, очевидно, к.и. (${}^{\smile}\partial / \partial x^i = \partial / \partial x^i$). Поэтому к.и. также обычные трехмерные символы Кристоффеля $\Delta_{ij,\,k}$ и Δ_{ij}^k для к.и. метрики h_{ik} и соответствующий оператор ковариантного дифференцирования (${}^{\smile}\nabla_i = \nabla_i$). Если Q_l — произвольный ковариантный вектор, то, как обычно,

$$(\nabla_i\nabla_k - \nabla_k\nabla_i)\, Q_l = H_{lki}^{\cdots j}Q_j,$$

где

$$H_{lki}^{\cdots j} = \partial\Delta_{il}^j/\partial x^k - \partial\Delta_{kl}^j/\partial x^i + \Delta_{il}^m\Delta_{km}^j - \Delta_{kl}^m\Delta_{im}^j.$$

Очевидно, $H_{lki}^{\cdots j}, H_{lk} = H_{lki}^{\cdots i}$ и $H = H_k^k$ — к. и.

В нормальной системе отсчета имеем вообще ${}^{\smile}\partial / \partial t = f\partial / \partial t$, где $f = (g^{00})^{1/2}$. Пусть $g^j = g^{0j}(g^{00})^{-1}$, а $Q_{i\ldots}^{k\ldots}$ — произвольный к.и. тензор. В произвольной системе отсчета находим

$$\frac{{}^{\smile}\partial Q_{i\ldots}^{k\ldots}}{c\,\partial t} = f\left\{\frac{\partial Q_{i\ldots}^{k\ldots}}{c\,\partial t} + g^j\nabla_j Q_{i\ldots}^{k\ldots} + Q_{j\ldots}^{k\ldots}\nabla_i g^j + \ldots - Q_{i\ldots}^{j\ldots}\nabla_j g^k - \ldots\right\}, \tag{1}$$

$$\frac{{}^{\smile}\partial\Delta_{ij}^k}{c\,\partial t} = f\left\{\frac{\partial\Delta_{ij}^k}{c\,\partial t} - H_{jil}^{\cdots k}g^l + \nabla_i\nabla_j g^k\right\}, \tag{2}$$

$$\frac{{}^{\smile}\partial\ln\sqrt{h}}{c\,\partial t} = f\left\{\frac{\partial\ln\sqrt{h}}{c\,\partial t} + \nabla_j g^j\right\}. \tag{3}$$

В (1) ковариантные производные можно заменить простыми. Скаляр f и вектор g^i — кинеметрические объекты: $\tilde{f} = f\,\partial x^0 / \partial\tilde{x}^0$, $\tilde{g}^i = (g^j\,\partial\tilde{x}^i / \partial x^j + \partial\tilde{x}^i / \partial x^0)\,\partial x^0 / \partial\tilde{x}^0$.

Введем полную к.и. производную во времени и полную производную по к.и. времени:

$$\frac{{}^{\smile}d}{dt} = \frac{{}^{\smile}\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j}\cdot v^j, \qquad \frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial x^j}\cdot\frac{dx^j}{d\tau}. \tag{4}$$

Если дифференцируемая величина — к.и. скаляр, то ${}^{\smile}d / dt = d / d\tau$. Пользуясь этим, можно преобразовать (7) и (9) в п.4.

Для к.и. дифференцируемых величин имеем

$$\frac{{}^{\smile}\partial^2}{\partial x^i\partial t} - \frac{{}^{\smile}\partial^2}{\partial t\partial x^i} = \frac{1}{c^2}F_i\frac{{}^{\smile}\partial}{\partial t}, \tag{5}$$

где F_i — к.и. вектор. Очевидно, $F_i = c^2\partial\ln f / \partial x^i$, так что $\nabla_iF_k = \nabla_kF_i$. Тождественное выполнение равенств $F_i = 0$ в рассматриваемой четырехмерной области есть необходимое и достаточное условие геодезической параллельности данных пространственных сечений в этой области. Тогда $g_{00} = 1$ при $g_{0i} = 0$.

Введем в каждой мировой точке местную геодезическую четырехмерную систему координат Σ с пространственным сечением, касательным в этой точке к данному пространству сечений. Тогда F_i есть взятый с обратным знаком к.и. вектор ускорения пространства сечений относительно Σ. Обозначим через A_{ik} и D_{ik} к.и. тензоры соответственно угловой скорости вращения и скоростей деформации пространства сечений относительно Σ.

Тогда $A_{ik}=0$ и

$$D_{ik}=\frac{1}{2}\frac{{}^{\smile}\partial h_{ik}}{\partial t},\qquad D^{ik}=-\frac{1}{2}\frac{{}^{\smile}\partial h^{ik}}{\partial t},\qquad D=\frac{{}^{\smile}\partial\ln\sqrt{h}}{\partial t}\quad(D=D_j^j). \tag{6}$$

4. Пусть m_0 — масса покоя частицы; $P^\alpha=m_0dx^\alpha/ds$ и Ξ^α — мировые векторы импульса и силы; E — к.и. энергия частицы; p_i — к.и. импульс; ξ_j — к.и. негравитационная сила. Тогда $c^2P^0(g^{00})^{-1/2}=E=mc^2$; $c^2P_i=-p_i=-mv_i$, к.и. масса $m=m_0(1-v_jv^j/c^2)^{-1/2}$, $c^3\Xi^0(g^{00})^{-1/2}=\xi_lv^l(1-v_jv^j/c^2)^{-1/2}$, $c^2\Xi_i=-\xi_i(1-v_jv^j/c^2)^{-1/2}$. Очевидно, $E^2/c^2-p_jp^j=m_0{}^2c^2$.

При постоянной m_0 мировые уравнения движения принимают вид

$$^{\smile}dE/dt+mD_{ij}v^iv^j-mF_iv^i=\xi_iv^i, \tag{7}$$

$$^{\smile}dp^k/dt+\Delta_{ij}^kp^iv^j+2mD_i^kv^i-mF^k=\xi^k. \tag{8}$$

Обратимся к распространению света в пустоте. Пусть K^α — мировой волновой вектор, ω — к.и. циклическая частота. Тогда $cK^0(g^{00})^{-1/2}=\omega$, $cK_i=-\omega\alpha_i$, $\alpha^i={}^{\smile}dx^i/du$, $du=c\,d\tau$.

Имеем

$$\frac{1}{\omega}\frac{{}^{\smile}d\omega}{dt}+D_{ij}\alpha^i\alpha^j-\frac{1}{c}F_j\alpha^j=0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{\omega}\frac{{}^{\smile}d(\omega\alpha^k)}{dt}+c\Delta_{ij}^k\alpha^i\alpha^j+2D_i^k\alpha^i-\frac{1}{c}F^k=0. \tag{10}$$

5. Пусть $T^{\mu\nu}$ — мировой тензор энергии и импульса; ρ — к.и. плотность массы; J^i — к.и. плотность потока массы, равная плотности импульса (ρc^2 — плотность энергии, J^ic^2 — плотность потока энергии); U^{ik} — плотность потока импульса, $U=U_j^j$. Тогда $T^{00}(g^{00})^{-1}=\rho$, $c^2T_i^0(g^{00})^{-1/2}=-J_i$, $c^2T_{ik}=U_{ik}$. Закон энергии и импульса принимает вид

$$\frac{{}^{\smile}\partial\rho}{\partial t}+D\rho+\frac{1}{c^2}D_{ij}U^{ij}+\left[\left(\nabla_j-\frac{1}{c^2}F_j\right)J^j\right]-\frac{1}{c^2}F_jJ^j=0, \tag{11}$$

$$\frac{{}^{\smile}\partial J^k}{\partial t}+DJ^k+2D_i^kJ^i+\left[\left(\nabla_i-\frac{1}{c^2}F_i\right)U^{ik}\right]-\rho F^k=0. \tag{12}$$

В прямые скобки заключены (к.и.) выражения для физической дивергенции J^k и U^{ik}.

Уравнения поля тяготения Эйнштейна, разрешенные относительно свернутого мирового тензора кривизны, могут быть представлены в виде

$$\frac{{}^{\smile}\partial D}{\partial t}+D_{jl}D^{jl}+\nabla_jF^j-\frac{1}{c^2}F_jF^j=-\frac{\varkappa}{2}(\rho c^2+U)+\Lambda c^2, \tag{13}$$

$$\nabla_j(h^{ij}D-D^{ij})=\varkappa J^i, \tag{14}$$

$$\frac{{}^{\smile}\partial D_{ik}}{\partial t}-2D_{ij}D_k^j+DD_{ik}+\nabla_iF_k-\frac{1}{c^2}F_iF_k-c^2H_{ik}=$$
$$=\frac{\varkappa}{2}(\rho c^2h_{ik}+2U_{ik}-Uh_{ik})+\Lambda c^2h_{ik}, \tag{15}$$

где $\varkappa$ — постоянная тяготения Эйнштейна, а Λ — космическая постоянная.

6. Условия вещественности к.и. $d\tau$ и du можно записать в виде

$$g^{00}>0,\quad -g^{00}g^{11}+(g^{01})^2>0,\quad g^{-1}g_{33}>0,\quad -g^{-1}>0.$$

Эти к.и. сигнатурные условия отличаются от обычных, хронометрически инвариантных (х.и.) ([3]), заменой $g_{\mu\nu}$ и g через $g^{\mu\nu}$ и g^{-1}.

Приведенные в пп. 2—5 соотношения и уравнения являются к.и. аналогами уже известных х.и. соотношений и уравнений ([1]). Приведем здесь и другие х.и. соотношения. Обозначим:

$$C_{ij}^{k}=\left({}^{*}\nabla_i-\frac{1}{c^2}F_i\right)D_j^k+\left({}^{*}\nabla_j-\frac{1}{c^2}F_j\right)D_i^k-\left({}^{*}\nabla^k-\frac{1}{c^2}F^k\right)D_{ij}.$$

Тогда ${}^{*}\partial\Delta_{ij}^{k}/\partial t=C_{ij}^{k}$ и, если $Q_{l\ldots}^{m\ldots}$ — тензор,

$$\left({}^{*}\nabla_i\frac{{}^{*}\partial}{\partial t}-\frac{{}^{*}\partial}{\partial t}{}^{*}\nabla_i\right)Q_{l\ldots}^{m\ldots}=\frac{1}{c^2}F_i\frac{{}^{*}\partial Q_{l\ldots}^{m\ldots}}{\partial t}+C_{il}^{j}Q_{j\ldots}^{m\ldots}+\ldots-C_{ij}^{m}Q_{l\ldots}^{j\ldots}-\ldots$$

Тензоры D_{ik} и $H_{iki}^{\cdot\cdot\cdot j}$ связаны тождествами:

$${}^{*}\partial H_{lki}^{\cdot\cdot\cdot j}/\partial t=\left({}^{*}\nabla_k-\frac{1}{c^2}F_k\right)C_{il}^{j}-\left({}^{*}\nabla_i-\frac{1}{c^2}F_i\right)C_{kl}^{j}.$$

Введем абсолютную х.и. производную ${}^{*}\nabla_t$ по времени от тензора $Q_{l\ldots}^{m\ldots}$, определив ее как скорость изменения этого тензора в системе Σ, которая является местной геодезической в данной мировой точке и имеет в ней линию времени, касательную к линии времени данной системы отсчета. Тогда

$${}^{*}\nabla_t Q_{l\ldots}^{m\ldots}={}^{*}\partial Q_{l\ldots}^{m\ldots}/\partial t-(D_l^j+A_l^{\cdot j})Q_{j\ldots}^{m\ldots}-\ldots+(D_j^m+A_j^{\cdot m})Q_{l\ldots}^{j\ldots}+\ldots,$$

$${}^{*}\nabla_t h_{ik}=0,\quad {}^{*}\nabla_t h_i^k=0,\quad {}^{*}\nabla_t h^{ik}=0,\quad {}^{*}\nabla_t\ln\sqrt{h}=0.$$

К.и. аналоги х.и. соотношений и уравнений можно получить, заменив все х.и. операторы к.и. операторами, положив $A_{lm}=0$ и придав всем обозначениям смысл, который они имеют в предыдущих п.п. При этом абсолютную к.и. производную ${}^{\smile}\nabla_t$ по времени от к.и. тензора $Q_{l\ldots}^{m\ldots}$ можно определить как скорость изменения этого тензора в системе Σ, указанной в п. 3. В системе координат, в которой всюду $g_{0i}=0$, к.и. величины совпадают с одноименными х.и. величинами.

Аппарат х.и. величин и аппарат к.и. величин допускают единое общековариантное обобщение (ср. ([4])), основанное на введении поля одиночных (и единичных) мировых векторов — монад.

Автор выражает искреннюю благодарность Ю. А. Романову, побудившему его ускорить завершение аппарата кинеметрических инвариантов и указавшему на целесообразность его применения к гамильтонову формализму (1967 г.).

Государственный астрономический институт
им. П. К. Штернберга
Москва

Поступило
6 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Л. Зельманов, Кандидатская диссертация, МГУ, 1944; ДАН, **107**, № 6, 815 (1956); Тр. VI совещ. по вопр. космогонии, 1959, стр. 144. [2] А. Л. Зельманов, ДАН, **124**, № 5, 1030 (1959). [3] А. Л. Зельманов, ДАН, **135**, № 6, 1367 (1960). [4] А. Л. Зельманов, Тез. докл. V Международн. конфер. по гравитации и теории относительности, Тбилиси, 1968, стр. 115.