Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 5

УДК 539.3 МЕХАНИКА

Академик АН УзбССР Х. А. РАХМАТУЛИН, К. А. КЕРИМОВ

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЦЕНТРИРОВАННЫХ «ПОПЕРЕЧНЫХ» ВОЛН

В работе рассматривается движение тонкой мембраны при ударе по ней заостренным телом. Предполагается, что материал мембраны подчиняется любому деформационному закону. Показывается, что при ударе возникают центрированные волны тогда, когда характеристики дифференциального уравнения движения не являются центрированными.

Рассматриваемая задача является как геометрически, так и физически нелинейной.

1. Уравнения характеристик в автомодельных переменных. В начальной стадии движения носовая область заостренного осесимметричного тела может быть принята за круглый конус. Движение при ударе конусом является автомодельным. Введем переменную $z = r / (v_0 t) = r / s$, где r — расстояние от центра удара, лагранжева координата, v_0 — скорость удара, t — время.

Для случая автомодельного движения четыре уравнения характеристик превращаются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dr = \pm \bar{b}\, ds; \quad du_n + u_\tau d\theta \mp (1 + \varepsilon_r)\, a_0 \bar{b} = \pm \frac{\bar{B}}{a_0} \frac{dz}{z(\bar{b} \mp z)},$$
$$dr = \pm \bar{a}\, ds; \quad du_\tau - u_n d\theta \pm a_0 \bar{a}\, d\varepsilon_\tau = \pm \frac{\bar{A}}{a_0} \frac{dz}{z(\bar{a} \mp z)}, \tag{1,1}$$

где a_0 — скорость звука в данном материале,

$$\bar{A} = \frac{1}{\rho_0}\left[\sigma_\tau (1 + u_\tau) - (1 + \varepsilon_\tau)\sigma_\varphi \cos\theta + r(1 + \varepsilon_\varphi)\frac{\partial \sigma_\tau}{\partial \varepsilon_\varphi}\frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial r}\right],$$
$$\bar{B} = \frac{1 + \varepsilon_r}{\rho_0}\sigma_\tau \sin\theta.$$

Здесь u_n, u_τ — соответственно нормальная и касательная скорости, θ — угол между касательной к меридиональному сечению мембраны и осью r (см. рис. 1); σ_τ, σ_φ — соответственно меридиональное и экваториальное напряжения, ε_τ, ε_φ — соответствующие деформации, u — радиальное перемещение, v — поперечное перемещение, $u_r = \partial u / \partial r$.

Кроме уравнения характеристик имеем геометрические соотношения

$$\cos\theta = \frac{1}{1 + \varepsilon_\tau}\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right), \qquad \sin\theta = \frac{1}{1 + \varepsilon_\tau}\frac{\partial v}{\partial r};$$

из этих уравнений получим

$$\frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\left[(1 + \varepsilon_\tau)\cos\theta - 1 - \varepsilon_\varphi\right].$$

Отсюда, переходя к автомодельным переменным, имеем

$$\frac{d\varepsilon_\varphi}{dz} = \frac{1}{z}\left[(1 + \varepsilon_r)\cos\theta - 1 - \varepsilon_\varphi\right]. \tag{1,2}$$

Таким образом, для определения пяти функций u_τ, u_n, ε_φ, ε_τ и θ имеем пять обыкновенных дифференциальных уравнений (1,1), (1,2).

Таким образом, задача нормального удара по гибкой мембране математически сводится к решению следующей краевой задачи для уравнений (1,1) и (1,2):

1) На фронте продольной волны, т. е. в точке A (рис. 1), радиальное смещение $u = 0$ или $\varepsilon_\varphi = 0$ $(\varepsilon_\varphi = u / r)$.

2) В общем случае в точке B должна выполняться непрерывность смещения и закон сохранения количества движения.

3) В точке схода C имеет место непрерывность смещений, скоростей и напряжений.

4) В точке удара D радиальное смещение равно нулю $(u = 0)$ и поперечное смещение равно смещению носика конуса.

В работе доказано, что в точке B волна сильного разрыва не возникает, т. е. $\theta = 0$; смещения, напряжения и скорости непрерывны.

Обратная задача о нахождении решений указанных дифференциальных уравнений по заданию одной константы на фронте продольной волны $(z = 1)$ и одной константы на фронте поперечной волны $(z = b_0)$ сводится к задаче Коши для уравнений (1,1), (1,2).

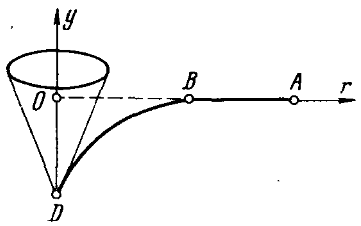

Рис. 1

Хотя в (1,1) имеются особые точки, но в этих точках искомые функции непрерывны, разрыв терпят их производные (слабый разрыв).

2. Решение задачи для упругих деформаций. Для случая упругой деформации в области радиального движения (от A до B) дифференциальные уравнения (1,1), (1,2) дают известное упругое решение ([1]).

В области радиально-поперечного движения (от B до C) в случае удара тупым конусом при малых скоростях удара $\cos\theta \cong 1$ и $\sin\theta \approx \theta$ оказывается, что решения для ε_φ, ε_τ являются аналитическим продолжением решения для радиальной области.

Для компонентов скоростей u_n, u_τ дифференциальные уравнения вида

$$\frac{du_n}{dz} - c_2 \frac{b_0^4 u_\tau}{z^2 (b_0^4 - z^4)^{3/4}} = c_2 \frac{b_0^4}{z (b_0^4 - z^4)^{3/4}},$$

$$\frac{du_\tau}{dz} + c_2 \frac{b_0^4 u_n}{z^2 (b_0^4 - z^4)^{3/4}} = -\frac{2b_0^4}{1-\nu} \frac{1}{z^2 (1 - z^2)}. \tag{2,1}$$

Эта система имеет особенности в точке $z = b_0$, т. е. на фронте поперечных волн (в точке B на рис. 1).

Преобразование $b_0 - z = x^4$ переводит систему (2,1) в систему с медленно меняющимися коэффициентами. Интегрируя указанную систему, получаем следующие решения краевой задачи:

$$\alpha = b_0 \bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} = \sqrt{\frac{\frac{2}{1-\nu} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{1-y}{y}}{{}^1/_4\, y (1+\nu) + [(1+y)(1+y^2)]^{-1}}}, \tag{2,2}$$

$$\bar{v}_0 = \frac{b_0^3 (1-y)^{1/4} \bar{\alpha}}{(1+y)^{3/4} (1+y^2)^{3/4}},$$

где $y = z / b_0$.

Для плоского случая вторая формула (2,2) имеет вид

$$\bar{v}_0 = \sqrt{2}\, b_0 \sqrt{b_4}. \tag{2,3}$$

Легко вывести уравнения характеристик для поперечных волн:

$$r^2 \mp s^2 b_0^2 = c. \tag{2,4}$$

Формулы (2,4) показывают, что характеристики, соответствующие поперечным волнам, не являются центрированными, в то время как сами поперечные волны являются центрированными и скорости их направлены вдоль лучей при приближении к точке удара (рис. 1). Этот результат является новым в волновой динамике.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
11 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Х. А. Рахматулин, Ю. А. Демьянов, Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках, М., 1961.