Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 6

УДК 517.946 **МАТЕМАТИКА**

Л. А. ИВАНОВ

ГЛАДКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПАРАМЕТРА РЕШЕНИЙ НЁТЕРОВЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 3 VII 1972)

В настоящей статье приводится абстрактная схема для получения гладко зависящих от параметра решений операторных уравнений при условиях ослабленной непрерывности соответствующих операторов (ср. ([1]), гл. X). Эту схему удается применить к исследованию поведения решений эллиптических задач при вариации области. При этом, в отличие от ([2]), не требуется однозначной разрешимости задач и рассматриваются негладкие решения.

1. Два банахова пространства E и E' будем называть парой (E, E'), если E' плотно и вполне непрерывно вложено в E. Пусть (E, E') и (B, B') — две пары банаховых пространств. Через $(E(t), E'(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, обозначим такую пару, что для некоторого проектора $P(t)$, $P(t) \in \mathscr{L}(E, E) \cap \cap \mathscr{L}(E, E')$, имеем $E(t) = P(t)E$, $E'(t) = P(t)E'$. При каждом $t \in [0, 1]$ рассматриваем оператор $A(t) \in \mathscr{L}(E(t), B) \cap \mathscr{L}(E'(t), B')$, удовлетворяющий следующим условиям:

1^0) Условие нормальной разрешимости

$$\|u\|_E \leqslant L(t)\|A(t)u\|_B, \quad t \in [0, 1],$$

где $u \in Q$, $Q_t \oplus \mathrm{Ker}_{E(t)} A(t) = E(t)$, никаких предположений на зависимость $L(t)$ от t не делается.

2^0) Неравенство коэрцитивности

$$\|u\|_{E'} \leqslant C\{\|A(t)u\|_{B'} + \|u\|_E\}, \quad t \in [0, 1], \tag{1}$$

где $u \in E'(t)$ и C не зависит от t.

Из (1) вытекает оценка

$$\|u\|_{E'} \leqslant C(t)\|A(t)u\|_{B'}, \quad t \in [0, 1], \tag{2}$$

для $u \in Q_t'$, $Q_t' \oplus \mathrm{Ker}_{E'(t)} A(t) = E'(t)$.

3^0) Постоянство размерности ядра

$$\dim \mathrm{Ker}_{E'(t)} A(t) = \dim \mathrm{Ker}_{E(t)} A(t) = k < \infty, \quad t \in [0, 1],$$

k не зависит от t.

Мы будем интересоваться существованием гладкого по t семейства $u(t)$ решений задачи

$$A(t)u = F(t), \quad F(t) \in E' \cap \mathscr{R}(A(t)), \quad t \in [0, 1]. \tag{3}$$

Определение. Оператор $V(t) \in \mathscr{L}(E, B) \cap \mathscr{L}(E', B')$ назовем ослабленно непрерывным из пары (E, E') в пару (B, B'), если

$$\sup_{\varphi \in E'} \frac{\|V(t)_\varphi - V(\tau)\varphi\|_B}{\|\varphi\|_{E'}} \to 0 \quad \text{при } \tau \to t. \tag{4}$$

Легко доказывается

Лемма 1. *Пусть $V(t) \in \mathscr{L}(E, B) \cap \mathscr{L}(E', B')$ сильно непрерывен и равномерно (по $t \in [0, 1]$) ограничен как оператор из E в B.*

Тогда $V(t)$ ослабленно непрерывен.

Если проектор $P(t)$ ослабленно непрерывен, то размерность $E(t)$ ($E'(t)$) может как угодно меняться при изменении t. Поэтому вводится условие

4^0) У каждой точки $t_0 \in [0, 1]$ существует окрестность $W(t_0)$ такая, что некоторый оператор $Z(t, \tau)$ осуществляет изоморфизм (равномерный по t, $\tau \in W(t_0)$) между парами $(E(\tau), E'(\tau))$ и $(E(t), E'(t))$. При этом

$$Z(t, \tau)Z(\tau, s) = Z(t, s), \quad Z(t, t) = I, \quad t, \tau, s \in W(t_0).$$

Теперь можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть в условиях $1^0) - 4^0)$ операторы $P(t)$, $A(t)P(t)$, $Z(t, \tau)$, t, $\tau \in W(t_0)$, ослабленно непрерывны в соответствующих парах пространств, а нормы $P(t)$ в $\mathscr{L}(E', E')$ и $A(t)P(t)$ в $\mathscr{L}(E', B')$ равномерно ограничены. Если $F(t)$ непрерывно по норме E и $\|F(t)\|_{B'} \leqslant C$, то существует семейство $u(t) \in E'$ решений задачи* (3), *непрерывное по норме E.*

Доказательство проводится локально и в нем используется

Лемма 2. *В условиях теоремы константа в неравенстве* (2) *может быть выбрана не зависящей от $t \in [0, 1]$ при соответствующем выборе Q_t'.*

Следствие. *В условиях теоремы 1 для однородной задачи* (3) ($F(t) \equiv 0$) *существует k линейно независимых решений $\{u_j(t)\}_{j=1}^k$, $k = \dim \operatorname{Ker} A(t)$, непрерывных по норме E (ср.* [1]).

2. Предположим, что в условиях п. 1 отображения дифференцируемы в сильном смысле и

$$t \to P'(t), \quad t \to [A(t)P(t)]', \quad t \in [0, 1],$$

— ослабленно непрерывные отображения в смысле (4), причем

$$\mathscr{R}([A(t)P(t)]'P(t)) \subset \mathscr{R}(A(t)P(t)).$$

Теорема 2. *В наших предположениях существуют k линейно независимых решений задачи* (3), *непрерывно дифференцируемых в E и*

$$u'(t) = v(t) - P'(t)u(t),$$

где $v(t)$ — решение задачи

$$A(t)v = F'(t) - [A(t)P(t)]'u(t).$$

Замечание. При условии однозначной разрешимости задачи (3), т. е. выполнении (2) с не зависящей от t константой, необходимость введения оператора $Z(t, \tau)$ из условия 4^0) отпадает.

3. Полученные теоремы можно применить для изучения решений эллиптических задач при вариации области. Пусть $G \subset R^n$ — ограниченная область и G_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$,— семейство областей $G_t \subset G$, гладко зависящих от параметра [2]. В области G заданы дифференциальные операторы $\{L, B_j\}_{j=1}^k$ порядков $2m$ и m_j соответственно. При каждом $t \in [0, 1]$

$$Lu = f \text{ в } G_t, \quad B_j u = \varphi_j \text{ на } \partial G_t, \tag{5}$$

— нормально разрешимая эллиптическая задача. В обозначениях книги [3] это означает выполнение неравенства

$$\|u\|_{H^{2m+s}(G_t)} \leqslant C\left\{\|Lu\|_{H^s(G_t)} + \sum_{j=1}^m \|B_j u\|_{H^{2m+s-m_j-1/2}(\partial G_t)} + \|u\|_{H^{2m+s-\varepsilon}(G_t)}\right\}, \tag{6}$$

для $s > 0$, $\varepsilon > 0$, $s - \varepsilon \geqslant 0$.

Лемма 3. *Константа в* (6) *может быть выбрана не зависящей от $t \in [0, 1]$, когда G_t достаточно гладко зависит от параметра.*

В соответствии с п.1 введем обозначения: $(E, E') = (H^{s-\varepsilon}(G), H^s(G))$, здесь s и ε такие же, как в (6); $(E(t), E'(t)) = (H^{s-\varepsilon}(G_t), H^s(G_t))$, $P(t) = R(t)S(t)$, где $S(t)$ — оператор сужения, а $R(t)$ — оператор продолжения функций с области Уитни — Хестенса (см. ([3])), наконец, $A(t) = R(t)LS(t)$ и $F(t) = P(t)f$.

Теорема 3. *Пусть при каждом* $t \in [0, 1]$ *задача* (5) *с* $\varphi_j \equiv 0$, $f \in H^s(G)$ *имеет* k*-мерное ядро,* $s > 0$.

Тогда существует k *линейно независимых решений* $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$, *таких, что* $R(t)u_i(t)$ *— непрерывные на* $[0, 1]$ *функции со значениями в* $H^{s-\varepsilon}(G)$, $s - \varepsilon \geqslant 0$.

Доказательство состоит в проверке условий 1°) — 4°) и исследовании зависимости $P(t)$ и $A(t)P(t)$ от t. Условие 1°) следует из нормальной разрешимости, 2°) — из леммы 3, $\mathrm{Ker}_{H^s(G_t)}\{L, B_j\} = \mathrm{Ker}_{H^{s-\varepsilon}(G_t)}\{L, B_j\}$ по теореме о повышении гладкости для общих эллиптических граничных задач. Существование операторов $Z(t, \tau)$ проверяется непосредственно.

Когда G_t зависит от t достаточно гладко, то операторы продолжения можно выбрать такими, что $P(t)$ будут сильно непрерывны, а значит, и ослабленно непрерывны (лемма 1). Доказательство ослабленной непрерывности $A(t)P(t)$ опирается на оценки функций в тонких областях ([2]).

Локальная формулировка теоремы 1 позволяет показать, что справедлива более общая

Теорема 4. *Пусть* $f \in H^s(G)$, $\varphi_j \in H^{2m+s-m_j}(G)$, $2m + s - m_j - 1/2 > 0$, *и размерность ядра задачи* (5) *неизменна при* $t \in [0, 1]$; *тогда существует* k *линейно независимых решений задачи* (5) $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$, *таких, что* $R(t)u_i(t)$ *непрерывны по норме* $H^{s-\varepsilon}(G)$, $s - s \geqslant 0$.

Для «негладких» решений задачи (5) справедлива

Теорема 5. *Пусть* s *такое, что* $2m + s - m_j - 1/2 > 0$, $j = 1, \ldots, m$, *система* $\{B_j\}_{j=1}^m$ *при каждом* t *нормальна на* ∂G_t.

Тогда справедливо утверждение теоремы 4 *при* $2m + s - m_j - 1/2 - \varepsilon \geqslant 0$.

Доказательство использует соответствующее обобщение неравенства коэрцитивности (6) для рассматриваемых s (см. ([3])), нужна также

Лемма 4. *Норма оператора вложения* $H^s_{G(t,\tau)}(G_t)$ *в* $H^{s-\varepsilon}_{G(t,\tau)}(G_t)$ *стремится к нулю при* $\tau \to t$, $s \in R$.

Здесь через $H^s_{G(t,\tau)}(G_t)$ обозначено пространство распределений из $H^s(G_t)$ с носителями в $G(t, \tau) = \overline{G_t - G_\tau}$.

Автор благодарит С. Г. Крейна за обсуждение полученных результатов.

Воронежский лесотехнический
институт

Поступило
26 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Хермандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., 1965. [2] S. G. Krein, Studia Math., **31**, 411 (1968). [3] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, Неоднородные граничные задачи и их приложения, М., 1971.