Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 1

УДК 519.21 *МАТЕМАТИКА*

А. М. ВЕРШИК

МЕТРИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ АВТОМОРФИЗМОВ ПРОСТРАНСТВА С МЕРОЙ, СВЯЗАННЫЙ С РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ РАЗБИЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 V 1972)

Анализ теоремы о лакунарном изоморфизме убывающих последовательностей измеримых разбиений ([1,2]) приводит к новому инварианту таких последовательностей (основной инвариант) и — через равномерную аппроксимацию — к новому инварианту действия групп преобразований, сохраняющих меру. Здесь этот инвариант определен и разобран с нескольких позиций для группы $\mathbf{Z}$.

1. Пусть $\{r_n\}$ — последовательность натуральных чисел $1 < r_n \leqslant r_{n+1}$, $n = 1, \ldots$; $\{r_n\}$-адической последовательностью называется убывающая последовательность измеримых разбиений $\{\xi_n\}$ *, где почти каждый элемент ξ_n составлен из r_n элементов равной условной меры разбиения ξ_{n-1}, $\xi_0 = \varepsilon$, $n = 1, \ldots$ Если $\bigwedge\limits_n \xi_n = \nu$, то последовательность называется регулярной; при $r_n \equiv 2$ — $\{\xi_n\}$-диадической последовательностью ([1]). Стандартной $\{r_n\}$-адической последовательностью называется последовательность, метрически изоморфная $\{\xi_n^0\}$, где ξ_n^0 — разбиение пространства $\left(\prod\limits_1^\infty \mathbf{Z}_{r_n}, \mu\right)$, μ — мера Хаара, на классы элементов, имеющих одинаковые координаты, начиная с $(n+1)$-й.

Предложение 1. *Для всякой последовательности $\{r_n\}$ существует нестандартная $\{r_n\}$-адическая регулярная последовательность* (см. ([2])).

Пусть $\{\xi_n\}$ — $\{r_n\}$-адическая последовательность; набор всех последовательностей натуральных чисел $\{n_k\}$, для которых $\{\xi_{n_k}\}$ стандартна, называется основным инвариантом последовательности и обозначается $\mathfrak{R}(\{\xi_n\})$. По теореме о лакунарном изоморфизме, доказываемой для $\{r_n\}$-адических последовательностей так же, как и для диадических (см. ([1,2])), множество $\mathfrak{R}(\{\xi_n\})$ всегда непусто. Ясно, что оно вместе с некоторой последовательностью $\mathfrak{R}(\{\xi_n\})$ содержит все ее мажоранты и подпоследовательности.

Предложение 2. *Для всякой $\{n_k\}$ существует диадическая последовательность $\{\xi_n\}$, для которой $\{n_k\} \notin \mathfrak{R}(\{\xi_n\})$.*

В пространстве последовательностей разбиений, снабженном слабой топологией ([3]), стандартные последовательности составляют всюду плотное G_δ-множество.

2. Из фундаментальной леммы Рохлина — Халмоша ([4,5]) следует возможность равномерной аппроксимации апериодического автоморфизма периодическими с максимально возможной скоростью. Уточняя эту лемму, можно доказать существование монотонной аппроксимации, именно: для всякого апериодического автоморфизма T существуют последовательности натуральных чисел $\{q_n\}$, $q_n = \prod\limits_1^n r_i$, $r_i > 1$, и периодических авто-

* Пространства с мерой здесь и ниже предполагаются пространствами Лебега.

морфизмов T_n такие, что: 1) q_n есть минимальный период T_n, 2) разбиения на траектории автоморфизмов T_n — $я(T_n)$ образуют $\{r_n\}$-адическую последовательность, 3) $\sup\limits_n q_n \mu\{x: T_n x \neq Tx\} < \infty$. Подобную аппроксимацию назовем *равномерной* $\{r_n\}$-*аппроксимацией* автоморфизма T, а возникающую при этом последовательность $\{я(T_n)\}$ назовем $\{r_n\}$-*фундаментом* для T.

Мы укажем геометрический инвариант равномерной аппроксимации, т. е. инвариант фундамента, не зависящий от самих аппроксимирующих автоморфизмов и способа монотонной аппроксимации. Заметим, что если T эргодичен, то $\{я(T_n)\}$ регулярна. Следующая теорема показывает, какие характеристики $\{r_n\}$-фундамента являются инвариантами самого автоморфизма.

Теорема 1. *Пусть T — эргодический автоморфизм и $\{r_n\}$, $r_n > 1$, — последовательность натуральных чисел. Любые два $\{r_n\}$-фундамента для T стандартны или нестандартны одновременно.*

Следствие. *Класс последовательностей натуральных чисел $\{r_n\}$, для которых $\{r_n\}$-фундамент есть стандартная последовательность разбиений, является метрическим инвариантом автоморфизма T. Назовем его шкалой T и обозначим $\mathfrak{S}(T)$.*

Если постоянная последовательность $r_n \equiv r$ лежит в шкале, то шкала называется *полной*. При этом все постоянные последовательности лежат или не лежат в $\mathfrak{S}(T)$ одновременно.

Теорема 2. *Множество автоморфизмов с полной шкалой образует всюду плотное G_δ в слабой топологии пространства всех автоморфизмов. В частности, автоморфизмы с дискретным спектром имеют полную шкалу.*

Замечания. 1. Не всякое множество последовательностей натуральных чисел может образовывать шкалу для какого-либо автоморфизма.

2. Для неэргодического автоморфизма шкала определяется как измеримое семейство шкал его эргодических компонент.

Предложение 3. *Для каждой последовательности натуральных чисел $\{r_n\}$ существует эргодический автоморфизм T, для которого $\{r_n\} \notin \mathfrak{S}(T)$; среди таких автоморфизмов есть автоморфизмы с нулевой энтропией.*

Поэтому автоморфизмы с нулевой энтропией могут иметь как полную, так и сколь угодно тощую шкалу.

Предложение 4. *Для всякого автоморфизма шкала не пуста.*

Вот пример конкретного вычисления шкалы.

Пусть T — автоморфизм с вполне положительной энтропией; если

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{1}^{n} r_i\right)^{-1} \lg r_{n+1} < \infty, \qquad (*)$$

то $\{r_n\} \notin \sigma(T)$. Если T — автоморфизм Бернулли и

$$\left(\prod_{1}^{n} r_i\right)^{-1} \lg r_{n+1} \to \infty, \qquad (**)$$

то $\{r_n\} \in \mathfrak{S}(T)$. Доказательство использует следующее утверждение.

Теорема 3. *Если последовательность $\{r_n\}$ удовлетворяет условию $(*)$, то энтропия автоморфизма равна энтропии его $\{r_n\}$-фундамента, рассматриваемого как $\{r_n\}$-адическая последовательность*. Если $\{r_n\}$ удовлетворяет условию $(**)$, то энтропия любой $\{r_n\}$-адической последовательности равна нулю.*

---

* Энтропия $\{r_n\}$-адической последовательности определяется так же, как энтропия диадической последовательности в ([3]).

3. Пусть T_1 и T_2 — эргодические автоморфизмы пространства (X, μ) и разбиения на их траектории совпадают: $\text{я}(T_1) = \text{я}(T_2)$. Тогда $T_1x = T_2^{n(x)}x$, где n — некоторая целочисленная функция на (X, μ). Если $\mu\{x: |n(x)| \geqslant \geqslant r_n\} \geqslant 2 / q_n$, $n = 1, \ldots$, то T_1 и T_2 называются непосредственно $\{r_n\}$-изохронными; если T_1 и VT_2V^{-1} непосредственно изохронны при каком-либо автоморфизме V, то T_1 и T_2 называются $\{r_n\}$-изохронными.

Предложение 5. 1) *T $\{r_n\}$-изохронно с автоморфизмом с дискретным спектром тогда и только тогда, когда $\{r_n\} \in \mathfrak{S}(T)$.* 2) *Любые два эргодические автоморфизма $\{r_n\}$-изохронны при некоторой $\{r_n\}$.*

Утверждение 2) в этом предложении, прямо следующее из теоремы о лакунарном изоморфизме, показывает, что для всякого метрического инварианта существует последовательность $\{r_n\}$, для которой у двух $\{r_n\}$-изохронных автоморфизмов значения этого инварианта различны, т. е. инвариант «падает» при некотором росте $\{r_n\}$. Так, из теоремы предыдущего пункта вытекает, что при выполнении условия (*) из $\{r_n\}$-изохронности двух эргодических автоморфизмов вытекает равенство их энтропий, а при условии (**) энтропия падает.

4. Определим понятие подстановочной почти периодичности функций на $\mathbf{Z}$ и покажем, как связан с ним и с новыми эргодическими теоремами наш инвариант.

Пусть на $\mathbf{Z}$ задана $\{r_n\}$-адическая структура, т. е. последовательность счетных разбиений η_n, $n = 1, \ldots$, где η_n есть разбиение $\mathbf{Z}$, k-й элемент которого имеет вид $\{kq_n + i\}_{i=1}^{q_n}$, $k \in \mathbf{Z}$, $q_n = \prod_1^n r_i$. Пусть $D(\{r_n\})$ — группа всех подстановок $\mathbf{Z}$ как счетного множества, оставляющих инвариантными все η_n, $n = 1, \ldots$ Функция f на $\mathbf{Z}$ называется $D(\{r_n\})$-периодической, если существует такая подстановка γ из $D(\{r_n\})$, что функция $n \mapsto f(\gamma n)$ периодическая в обычном смысле. f $D(\{r_n\})$-почти периодическая, если любой полином от ее сдвигов есть предел в смысле нормы $\|x\| = \lim\limits_n \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^n |x_i|$ $D(\{r_n\})$-периодических функций. Всякая почти периодическая функция по Безиковичу является $D(\{r_n\})$-почти периодической при всех $\{r_n\}$.

Теорема 4. *Пусть μ — произвольная мера в $X = [0, 1]^{\mathbf{Z}}$, инвариантная и эргодическая относительно сдвига T.* 1) *Существует такая последовательность $\{r_n\}$, что почти все $x \in X$ $D(\{r_n\})$-почти периодичны, как функции на $\mathbf{Z}$,* 2) *множество таких последовательностей $\{r_n\}$ совпадает со шкалой T, как автоморфизма пространства (X, μ).*

Придадим этому факту вид эргодической теоремы, уточняющей индивидуальную эргодическую теорему для распределений.

Теорема 5. *Пусть T — эргодический автоморфизм пространства (X, μ) Существует последовательность $\{r_n\}$ такая, что для любой функции $f \in \in L'(X, \mu)$ имеется последовательность наборов чисел $\{c_i^{(n)}\}_{i=1}^{q_n}$ и что*

$$\lim_n \min_{\gamma \in D_n} \frac{1}{q_n} \sum_{i=1}^{q_n} |f(T^i x) - c_{\gamma(i)}^{(n)}| = 0$$

почти всюду; здесь $q_n = \prod_1^n r_i$, D_n — группа подстановок $\overline{1, q_n}$, сохраняющих инвариантными разбиения η_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ (точнее, их ограничения на $\overline{1, q_n}$); множество таких $\{r_n\}$ совпадает с $\mathfrak{S}(T)$.

Подобные эргодические теоремы можно назвать подстановочными, они указывают на некоторое структурное свойство почти всех реализаций стационарного случайного процесса, охватывающее все частотные закономерности. Подстановочные эргодические теоремы можно формулировать и для других последовательностей групп вместо D_n; для симметрических групп мы получим индивидуальную теорему для распределений.

Давая самое прямое определение шкалы, теорема 5 показывает, что шкала характеризует в инвариантной форме понятие скорости сходимости в эргодической теореме и дает средство вычисления шкалы. Эти вычисления связаны с оценками больших уклонений, равномерных по степеням сдвига. В связи с этим уместно объяснить, что автоморфизмы, существование которых гарантирует предложение 3, строятся с помощью приема, который в символическом изложении выглядит как замедление времени, приводящее к аномально медленной сходимости в эргодической теореме.

5. Изучение недавнего примера небернуллиевского K-автоморфизма Д. Орнштейна ([6]) позволило С. А. Юзвинскому доказать, что для всякого вполне эргодического автоморфизма T существует K-автоморфизм S, для которого T есть прямой сомножитель производного. Соединяя это с предложением 3 и используя монотонность шкалы относительно перехода к производному автоморфизму и фактор-автоморфизму, мы получим K-автоморфизмы со сколь угодно тощей шкалой, среди которых существует, во всяком случае счетное число, неизоморфных попарно K-автоморфизмов с данной энтропией. Для этих K-автоморфизмов скорость сходимости в эргодической теореме в вышеприведенном смысле аномально медленная.

Подробное изложение результатов этой работы будет опубликовано в журнале «Функциональный анализ и его приложение», 1973 г.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
25 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Вершик, Функц. анализ, 2, в. 3, 17 (1968). [2] А. М. Вершик, ДАН, **193**, № 4, 748 (1970). [3] А. М. Вершик, Функц. анализ, **5**, в. 3, 16 (1971). [4] П. Халмош, Лекции по эргодической теории, М., 1959. [5] В. А. Рохлин, УМН, **4**, 2, 57 (1949). [6] Д. Орнштейн, Сборн. пер. Математика, **15**, 1, 131 (1971).