Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 1

УДК 519.4 : 517 : 513.88 МАТЕМАТИКА

Ю. М. ВУВУНИКЯН

ПОРОЖДЕНИЕ КВАЗИЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛУГРУПП-ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 15 V 1972)

Непрерывную на $R^+ = (0, +\infty)$ полугруппу-обобщенную функцию [1] T эндоморфизмов локально выпуклого пространства X мы будем называть квазиэкспоненциальной, если для любых полунормы p из определяющей совокупности полунорм P пространства X и вектора $x \in X$ существуют числа $\omega \geqslant 0$ и $M > 0$ такие, что

$$p(T(\delta_t)x) \leqslant Me^{\omega t}, \quad t > 0.$$

Это общий класс полугрупп-обобщенных функций, для которых удается доказать «первую показательную формулу»

$$T(\delta_t)x = \lim_{h\to+0} e^{tA_h}x,$$

где $A_h \overset{\text{def}}{=} h^{-1}(T(\delta_h) - I)$, причем сходимость равномерная по t на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset R^+$.

Настоящая заметка посвящена доказательству теоремы, дающей необходимое и достаточное условие порождения квазиэкспоненциальной полугруппы. При этом в дальнейшем будут использоваться терминология и обозначения работы [1].

Теорема. *Пусть (μ_n) — сохраняющая последовательность функций, равных тождественно единице на $[-\infty, h - 1/2]$ и с носителем на $(-\infty, h)$. Чтобы замкнутый линейный оператор A с плотной областью определения в квази-полном локально выпуклом пространстве X порождал квази-экспоненциальную полугруппу, необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое $N > 0$, что для произвольного $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1$, и $n = 1, 2, 3, \ldots$ выполнялись следующие условия:*

I. *Область*

$$\Lambda_n = \left\{\lambda \,\middle|\, |\operatorname{Im}\lambda| > \exp\left(\frac{\varepsilon - n}{N}\operatorname{Re}\lambda\right)\right\} \cup \{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda > 0\}$$

является допустимой для R_n.

II. *Семейство операторов*

$$\{(1 + |\lambda|^{nN/(\varepsilon-n)}R_n(\lambda) \mid \operatorname{Re}\lambda > 0\}$$

равностепенно непрерывно.

III. *Для любых полунормы $p \in P$ и вектора $x \in X$ существует такое $C > 0$, что*

$$p(R_n(\lambda)x) \leqslant C^n(1 + |\lambda|)^{nN/(n-\varepsilon)}, \quad \lambda \in \Lambda_n \setminus \{\operatorname{Re}\lambda > 0\}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть A — инфинитезимальный оператор квазиэкспоненциальной полугруппы T. Тогда, в силу критерия непрерывности [1], условия I и II выполнены, и остается доказать III. Возьмем регуляризующую направленность функций (φ_ε) таких, что φ_ε тождество равна единице $[0, \varepsilon/2]$ и $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset (-\infty, \varepsilon)$, и положим $v_{n,\varepsilon} = \mu_n - \varphi_\varepsilon$. Оценим слагаемые, входящие в правую часть равенства

$$R_n(\lambda)x = (\varphi_\varepsilon T x)(e^{-\lambda(\cdot)}) + \int_{\varepsilon/2}^{n} v_{n,\varepsilon}(t)\, e^{-\lambda t} T(\delta_t)\, x\, dt. \tag{1}$$

По теореме Пэли — Винера, при $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ существует $K' > 0$ такое, что

$$p((\varphi_\varepsilon T x)(e^{-\lambda(\cdot)})) \leqslant K'(1 + |\lambda|)^N e^{-\varepsilon \operatorname{Re}\lambda}.$$

Заметив, что $0 \leqslant v_{n,\varepsilon}(t) \leqslant 1$ на R_t, получим при $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$

$$p\left(\int_{\varepsilon/2}^{n} v_{n,\varepsilon}(t)\, e^{-\lambda(\cdot)} T(\delta_t)\, x\, dt\right) \leqslant K'' e^{-n(\operatorname{Re}\lambda - \omega)}, \tag{3}$$

где K'' — подходящая константа, не зависящая от n.

Тогда при $\lambda \in \Lambda_n \setminus \{\operatorname{Re}\lambda > 0\}$ из (1)—(3) получим

$$p(R_n(\lambda)x) \leqslant K'(1 + |\lambda|)^N |\operatorname{Im}\lambda|^{\varepsilon N/(n-\varepsilon)} + K'' e^{n\omega} |\operatorname{Im}\lambda|^{nN/(n-\varepsilon)} \leqslant$$
$$\leqslant (K' + K'' e^{n\omega})(1 + |\lambda|)^{nN/(n-\varepsilon)} \leqslant C^n (1 + |\lambda|)^{nN/(n-\varepsilon)},$$

где $C \overset{\text{def}}{=} K' + K'' e^{\omega}$.

Достаточность. В силу критерия непрерывности, A порождает непрерывную на R^+ полугруппу-обобщенную функцию T. Докажем, что она квазиэкспоненциальна. При $t \leqslant n - 1$ имеем

$$T(\delta_t * \varphi_r)x = (2\pi i)^{-1} \int_{\partial\Lambda_n} e^{\lambda t} \tilde{\varphi}_r(\lambda)\, R_n(\lambda)\, x\, d\lambda. \tag{4}$$

Из условия III и оценки $\tilde{\varphi}_r(\lambda) \leqslant K(1 + |\lambda|)^{-N-1}$ при $\lambda \in \Lambda_n \setminus \{\operatorname{Re}\lambda > 0\}$ тогда следует, что

$$p(T(\delta_t * \varphi_r)x) \leqslant QC^n \int_{\partial\Lambda_n} e^{t \operatorname{Re}\lambda} (1 + |\lambda|)^{nN/(n-\varepsilon)-N-1}\, d|\lambda|. \tag{5}$$

Разобьем последний интеграл на интегралы по γ_+ — границе в верхней полуплоскости, γ_- — границе в нижней полуплоскости и γ_0 — границе на мнимой оси и оценим соответствующие интегралы Γ_+, Γ_-, Γ_0. Имеем

$$\Gamma_+ \leqslant L_0 \int_1^{\infty} |\operatorname{Im}\lambda|^{\varkappa^{-1}(t-\varepsilon)-1} d(\operatorname{Im}\lambda) \leqslant \frac{L_0}{N} \frac{n-\varepsilon}{n-1-\varepsilon} \leqslant L, \tag{6}$$

где $\varkappa \overset{\text{def}}{=} N^{-1}(\varepsilon - n)$, а L_0, L — константы, не зависящие от n.

Заметим, что Γ_- оценивается аналогичным образом.

Рассмотрим теперь

$$\Gamma_0 \leqslant S_0 \int_{-1}^{1} (1 + |\operatorname{Im}\lambda|^{-\varepsilon\varkappa^{-1}-1} d(\operatorname{Im}\lambda) \leqslant \frac{2S_0(n-\varepsilon)}{N\varepsilon} \cdot 2^{\varepsilon N/(n-\varepsilon)} \leqslant nS, \tag{7}$$

где S_0, S — подходящие константы, не зависящие от n.

Подставляя оценки (6) и (7) в (5) и замечая, что правая часть не зависит от r, получаем, что для всех $t \in (0, n-1)$ имеет место неравенство

$$p(T(\delta_t)x) \leqslant Q(2L + nS)C^n$$

и, следовательно, существуют такие B, $\Omega \geqslant 1$, что

$$p(T(\delta_t)x) \leqslant B\Omega^n. \tag{8}$$

Если $t \in (n-2, n-1]$, $n \geqslant 2$, то из (8) следует

$$p(T(\delta_t)x) \leqslant B\Omega^2\Omega^t,$$

и, обозначая $B\Omega^2 = M$, $\ln \Omega = \omega$, получим для всех $t > 0$

$$p(T(\delta_t)x) \leqslant Me^{\omega t},$$

что и требовалось доказать.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
20 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. М. Вувуникян, ДАН, **203**, № 2, 270 (1972).