Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 1

УДК 513.83 МАТЕМАТИКА

Б. Д. ГЕЛЬМАН

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КАКУТАНИ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 5 V 1972)

В настоящей заметке обобщается теорема Какутани ([7]) на случай многозначных отображений, образы которых имеют нетривиальные гомотопические группы.

Мы используем метод однозначных аппроксимаций, развитый в работах ([2-6]), но в более общей ситуации, при этом для доказательства существования однозначной аппроксимации применяется некоторое обобщение классической теории препятствий (см. ([8])). Другие понятия алгебраической топологии, использованные в статье, см. ([1], [8]).

1. Пусть K — конечный полиэдр размерности n, а X — произвольное топологическое пространство. Устроим сквозную нумерацию всех симплексов комплекса K с фиксированной триангуляцией. Симплексы этого комплекса будем обозначать σ_l^s, где s — размерность, l — порядковый номер. Сопоставим каждому симплексу некоторое подмножество в X и обозначим его X_l^s.

В этом пункте рассмотрим задачу о существовании непрерывного отображения $f\colon K\to X$, удовлетворяющего условию согласования: т. е. $f(\sigma_l^s)\subset X_l^s$. При этом предполагается, что: а) X_l^s $(n-1)$-просты, б) $\partial X_l^s\subset X_l^s$, где $\partial X_l^s = \bigcup\limits_{\sigma_\beta^{s-1}\subset\partial\sigma_l^s} X_\beta^{s-1}$; в) если $X_\beta^{s-1}\subset\partial X_\alpha^s$, то $i: X_\beta^{s-1}\to X_l^s$ порождает изоморфизм гомотопических групп в размерностях $j=0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Если полиэдр K линейно связный, то для любых двух множеств X_α^p и X_β^q существует изоморфизм*

$$i_{\beta_*}^{\alpha}\colon \pi_j(X_\alpha^p)\to\pi_j(X_\beta^q),\quad \text{где } j=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Лемма 2. *Если полиэдр K односвязный, то этот изоморфизм канонический, т. е. для любого множества X_γ^s следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
\pi_j(X_\alpha^p) \arrow[rr, "i_{\beta*}^{\alpha}"] \arrow[dr, "i_{\gamma*}^{\alpha}"'] & & \pi_j(X_\beta^q) \\
& \pi_j(X_\gamma^s) \arrow[ur, "i_{\beta*}^{\gamma}"'] &
\end{tikzcd}$$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что полиэдр односвязный.

Будем строить отображение f индуктивно, по остовам. Рассмотрим нульмерный остов. На нем отображение строится так: в качестве $f(\sigma_\alpha^0)$ выберем произвольную точку из X_α^0. На одномерный остов отображение f продолжается в силу линейной связности множеств X_α^1.

Предположим, что наше отображение f определено на $(s-1)$-остове. Построим препятствие к продолжению этого отображения на s-остов. Рассмотрим произвольный s-мерный симплекс σ_k^s. Рассмотрим отображение $S^{s-1}\xrightarrow{\chi}\sigma_k^s\xrightarrow{f}X_k^s$, где χ — некоторый гомеоморфизм. Тогда симплексу

σ_k^s мы можем сопоставить элемент гомотопической группы $\pi_{s-1}(X_k^s)$. Зафиксируем некоторое множество X_l^q и будем обозначать его X_0. Тогда в силу лемм 1 и 2 существует канонический изоморфизм i_*^k: $\pi_{s-1}(X_k^s) \to \pi_{s-1}(X_0)$. Тогда мы симплексу σ_k^s сопоставим элемент гомотопической группы $\pi_{s-1}(X_0)$. Распространив это отображение на s-мерные цепи, получим коцепь $c_f^s \in C^s(K, \pi_{s-1}(X_0))$, которую будем называть s-препятствием к согласованному продолжению отображения f или просто s-препятствием.

Теорема 1. *Для того чтобы отображение f было согласованно продолжимо на s-остов, необходимо и достаточно, чтобы $c_f^s = 0$.*

Свойства c_f^s аналогичны свойствам классического препятствия к продолжению отображения. Сформулируем их.

Лемма 3. c_f^s — *коцикл.*

Пусть f и g: $K^{s-1} \to X$ и удовлетворяют условию согласования, пусть $f = g$ на K^{s-2}, тогда, аналогично классическому случаю (см. [8]), можно определить понятие согласованной различающей отображений f и g, $c_{f,g}^{s-1} \in C^{s-1}(K, \pi_{s-1}(X_0))$. Справедливы следующие леммы.

Лемма 4. *По отображению f, удовлетворяющему условию согласования, и любой коцепи $h \in C^{s-1}(K; \pi_{s-1}(X_0))$ найдется отображение g, удовлетворяющее условию согласования и такое, что $c_{f,g}^{s-1} = h$.*

Лемма 5. *Для любого симплекса σ_k^s справедливо следующее равенство:* $\delta c_{f,g}^{s-1}(\sigma_k^s) = (c_f - c_g)(\sigma_k^s)$.

Теорема 2. *Если c_f^s гомологично 0, то найдется отображение g, удовлетворяющее условию согласования на K^{s-1}, совпадающее с f на K^{s-2}, и которое может быть продолжено на K^s.*

Следствие 1. *Если полиэдр K стягиваемый, то всегда существует отображение f: $K \to K$, удовлетворяющее условию согласования.*

2. Напомним основные понятия теории многозначных отображений. Отображение F, переводящее топологическое пространство K в топологическое пространство X, называется многозначным, если $\forall x \in K$ его образ $F(x)$ — подмножество в X и $F(x) \neq \emptyset$. Многозначное отображение F называется замкнутым, если график $\Gamma = \bigcup_{x \in K} (x; F(x))$ замкнут в $K \times X$.

Мы будем предполагать, что K — конечный полиэдр размерности n, а X — компактное метрическое пространство. Тогда справедлива следующая

Лемма 6 (см. [4, 6]). *Пусть F: $K \to X$ — многозначное замкнутое отображение, тогда $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \beta > 0$ можно указать такое число $\alpha(\varepsilon, \beta) > 0$, что в β-окрестности произвольного множества T, диаметр которого меньше α, найдется точка x_0, называемая спутником множества T, что $F_\varepsilon(x_0) \supset \overline{\bigcup_{x \in T} F(x)} = F(T)$, где $F_\varepsilon(x_0)$ — ε-раздутие множества $F(x_0)$.*

В дальнейшем β-окрестность множества T мы будем обозначать через $U_\beta(T)$.

В этом пункте мы будем изучать вопрос, когда многозначное отображение F имеет однозначную аппроксимацию. Введем понятие определяющего набора.

Рассмотрим последовательность чисел

$$\mu > \varepsilon_n > \varepsilon_{n-1} > \ldots > \varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0. \tag{1}$$

Далее рассмотрим новую последовательность $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ и число d_0 такие, что

$$0 < \beta_k < {}^1\!/\!_4\beta_{k+1}, \quad 4\beta_k + d_0 < \alpha(\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k; \beta_{k+1}). \tag{2}$$

Последовательности (1) и (2) назовем определяющими наборами (см. также [4, 6]).

Триангулируем полиэдр K столь мелко, чтобы диаметр каждого симплекса стал меньше $\min(d_0; \alpha(\varepsilon_1; \beta_1))$. Устроим сквозную нумерацию всех симплексов.

Мы хотим свести задачу о существовании однозначной аппроксимации отображения F к задаче, изученной в п. 1.

Рассмотрим нульмерный симплекс σ_i^0; множество $F(\sigma_i^0)$ обозначим через X_i^0. Рассмотрим теперь одномерный симплекс σ_i^1; $\operatorname{diam}\sigma_i^1 < \alpha(\varepsilon_1, \beta_1)$, поэтому найдется спутник этого множества — точка $x_i^1 \in U_{\beta_1}(\sigma_i^1)$, такая, что $F(\sigma_i^1) \subset F_{\varepsilon_1}(x_i^1)$. Множество $F_{\varepsilon_1}(x_i^1) = X_i^1$.

Пусть теперь σ_i^2 — двумерный симплекс: $\sigma_i^{2,1}, \sigma_i^{2,2}, \sigma_i^{2,3}$ — его одномерные грани, точки $x_i^{2,1}, x_i^{2,2}, x_i^{2,3}$ — спутники этих граней. Они образуют множество T_i^2, для которого справедливо $\operatorname{diam} T_i^2 < 2\beta_1 + d_0 < \alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1; \beta_2)$. Значит, найдется точка x_i^2 — спутник множества T_i^2, где $x_i^2 \in U_{\beta_2}(T_i^2)$ и $F(T_i^2) \subset F_{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}(x_i^2)$. Обозначим через X_i^2 множество $F_{\varepsilon_2}(x_i^2)$.

Аналогично множеству X_i^2 можно построить множества X_i^s и для симплексов старших размерностей.

Совершенно очевидно, что $\partial X_i^s \subset X_i^s$. Дадим еще одно определение. Мы будем говорить, что замкнутое отображение F удовлетворяет свойству (L), если:

а) $\exists \varepsilon_0 > 0$, что $\forall \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $\forall x_0 \in K$ $F(x) \in F_\varepsilon(x_0)$ и отображение вложения индуцирует изоморфизм гомотопических групп до размерности $n-1$, когда $\rho(x; x_0) < \delta$, где $\delta(\varepsilon, x_0)$;

б) $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$ и $\forall x \in K$ множества $F_\varepsilon(x)$ $(n-1)$-просты.

Очевидно, что образы многозначных отображений, удовлетворяющих свойству (L), могут иметь нетривиальные гомотопические группы.

Лемма 7. *Если F удовлетворяет свойству* (L) *и определяющие наборы* (1) *и* (2) *достаточно мелки, то множества X_i^s удовлетворяют условиям п. 1 для таких множеств.*

Отображение f: $K \to X$ и удовлетворяющее условиям согласования, назовем однозначной аппроксимацией, построенной по определяющему набору (1), (2).

Справедлива следующая

Теорема 3. *Если полиэдр K стягиваемый, а отображение F удовлетворяет свойству* (L), *то всегда существует однозначная аппроксимация f, построенная по достаточно мелкому определяющему набору* (1), (2).

3. Сформулируем теоремы о неподвижных точках.

Теорема 4. *Если замкнутое многозначное отображение F, удовлетворяющее свойству* (L), *переводит шар T в себя, то у него существует неподвижная точка.*

Доказательство этой теоремы основано на том, что в силу теоремы 4 у F существуют однозначные аппроксимации, которые переводят T в себя и, следовательно, имеют неподвижные точки. Неподвижные точки аппроксимаций сходятся к неподвижной точке многозначного отображения, если определяющие наборы, по которым строятся аппроксимации, брать стремящимися к нулю.

Аналогично доказывается более общая

Теорема 5. *Если замкнутое многозначное отображение F, удовлетворяющее свойству* (L), *переводит стягиваемый полиэдр K в себя, то у него существует неподвижная точка.*

Результаты данной работы докладывались на семинаре акад. П. С. Александрова.

В заключение я хочу выразить свою признательность Ю. Г. Борисовичу за постановку задачи и ценные замечания.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
26 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Комбинаторная топология, М.—Л., 1947. [2] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман и др., ДАН, 187, № 5 (1969). [3] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман и др., Тр. семинара по функц. анализу, Воронежск. гос. унив., в. 12 (1969). [4] Ю. Г. Борисович, Ю. Е. Гликлих, Тр. летней математич. школы, 1970. [5] Ю. Е. Гликлих, Сборн. трудов аспирантов матем. факультета, в. 1, 1971. [6] А. Д. Мышкис, Матем. сборн., 34 (76), № 3 (1954). [7] S. Kakutani, Duke Math. J., 7, 457 (1941). [8] Д. Фукс, А. Фоменко, В. Гутенмахер, Гомотопическая топология, М., 1967.