Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 6

УДК 517.54 *МАТЕМАТИКА*

А. П. КОПЫЛОВ

О ПОВЕДЕНИИ НА ГИПЕРПЛОСКОСТЯХ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА, БЛИЗКИХ К КОНФОРМНЫМ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 30 VI 1972)

Пусть R^n — n-мерное эвклидово пространство, $n \geqslant 3$, а $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис в нем. Рассмотрим произвольное неотрицательное число ε, гиперплоскость $\tau = \left\{x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k : x_n = 0\right\}$ и отображение f: $\tau \to R^n$, $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, гиперплоскости τ в пространство R^n.

Отображение f назовем ε-почти мёбиусовым, если для каждой точки $x_0 \in \tau$ и каждого числа $r > 0$ существует мёбиусово преобразование $L_{x_0, r, f}$: $R^n \to R^n$ такое, что

$$|L_{x_0, r, f}(f(x)) - x| \leqslant r\varepsilon$$

при $x \in \tau$ и $|x - x_0| \leqslant r$. Будем говорить также, что отображение f: $\tau \to R^n$ является почти мёбиусовым, если оно окажется ε-почти мёбиусовым преобразованием при некотором $\varepsilon \geqslant 0$ *.

Из результатов исследований Ю. Г. Решетняка [1-4], а также П. П. Белинского [5, 6] об устойчивости в теореме Лиувилля о конформных отображениях пространства непосредственно следует

Теорема 1. *Существуют число $\varepsilon_1 > 0$ и функция $\alpha(\varepsilon) \geqslant 0$, определенная при $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_1$, причем $\alpha(\varepsilon) \to \alpha(0) = 0$ при $\varepsilon \to 0$, такие, что если F: $R^n \to R^n$ есть $1+\varepsilon$-квазиконформное отображение с $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_1$, то ограничение $f = F|\tau$ отображения F на τ $\alpha(\varepsilon)$-почти мёбиусово.*

Основным результатом данной заметки является

Теорема 2. *Существуют числа $\varepsilon_2 > 0$ и $a > 0$ такие, что если f: $\tau \to R^n$ — ε-почти мёбиусово отображение с $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_2$, то f является ограничением на τ некоторого $1 + a\varepsilon$-квазиконформного отображения F: $R^n \to R^n$.*

Замечание 1. K-квазиконформным отображением мы называем здесь квазиконформное отображение, почти во всех точках дифференцируемости которого полный дифференциал переводит сферу в эллипсоид с отношением наибольшей оси к наименьшей, не превосходящим числа $K \geqslant 1$.

Замечание 2. Величины ε_1, $\alpha(\varepsilon)$, ε_2 и a зависят только от размерности пространства.

Замечание 3. Недавно П. П. Белинский установил, что порядок близости пространственного K-квазиконформного отображения шара к конформному равен $K-1$ (в замкнутом шаре) [7]. Следовательно, функция $\alpha(\varepsilon)$ может быть заменена на линейную функцию $b\varepsilon$, $b > 0$.

Изложим план доказательства теоремы 2. Для простоты изложения рассмотрим случай $n = 3$.

Лемма 1. *Пусть f: $\tau \to R^3$ — произвольное ε-почти мёбиусово отображение, где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 0{,}1$.*

* В связи с этим определением следует заметить, что для того, чтобы отображение f: $\tau \to R^n$ было 0-почти мёбиусовым, необходимо и достаточно, чтобы оно являлось ограничением на τ некоторого мёбиусова отображения F: $R^n \to R^n$ пространства R^n в себя.

Тогда для каждой точки $x_0 \in \tau$ и каждого числа $r > 0$ существует сохраняющее ориентацию изометрическое преобразование $P_{x_0, r} = P_{x_0, r, f}$: $R^3 \to R^3$, $P_{x_0, r}(0) = 0$, такое, что

$$\left| P_{x_0, r}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{|f(x_0 + re_1) - f(x_0)|}\right) - \frac{x - x_0}{r} \right| \leqslant 5\varepsilon \tag{1}$$

при $x \in \tau$ и $|x - x_0| \leqslant r$.

Рассмотрим ε-почти мёбиусово отображение f: $\tau \to R^3$ с $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 0{,}1$. Из леммы 1 следует существование отображения P_f: $\tau \times R_+ \to \{P\}$ декартова произведения $\tau \times R_+$ плоскости τ и множества R_+ положительных чисел в множество $\{P\}$ всех сохраняющих ориентацию изометрических отображений P: $R^3 \to R^3$, $P(0) = 0$, со свойством: для каждой точки $x_0 \in \tau$ и каждого числа $r > 0$ преобразование $P_{x_0, r} = P_f(x_0, r)$ удовлетворяет неравенству (1) для отображения f при $x \in \tau$ и $|x - x_0| \leqslant r$. С каждой парой f и P_f свяжем отображение $\Phi = \Phi(f, P_f)$: $\overline{R_+{}^3} \to R^3$ полупространства $\overline{R_+{}^3} = \{z = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3\colon z_3 \geqslant 0\}$ в пространство R^3, совпадающее с f в точках плоскости τ и равное $f(x_z) + |f(x_z + z_3e_1) - f(x_z)| \cdot P^{-1}_{x_z, z_3}(e_3)$, если $z_3 > 0$, а $x_z = z_1e_1 + z_2e_2$.

Из леммы 1 следует, что отображение f инъективно и непрерывно, а отображение Φ не обязано быть даже непрерывным. Но тем не менее оно непрерывно в точках плоскости τ и обладает следующими свойствами.

Лемма 2. *Если f нормировано условиями $f(0) = 0$, $f(e_1) = e_1$ и $f(e_2) = c_1e_1 + c_2e_2$, $c_2 > 0$, то*

$$|\Phi(z) - z| \leqslant 5\varepsilon(|z| + 1)\left(\frac{|z|}{1 - 5\varepsilon|z|} + 40\varepsilon\right)$$

при $z \in \tau$ и $\varepsilon < \min\left\{\frac{1}{5|z|}, \frac{1}{40}\right\}$ и

$$|\Phi(z) - z| \leqslant 5\varepsilon(11 + 20\varepsilon)(|x_z| + z_3 + 1)\left(\frac{|x_z| + z_3 + 2}{1 - 5\varepsilon(|x_z| + z_3 + 1)} + 9\right) = \lambda(\varepsilon, z)$$

при $z_3 > 0$, $\varepsilon < \frac{1}{5(|x_z| + z_3 + 1)}$ и $\lambda(\varepsilon, z) < z_3$.

Лемма 3. *Для любых двух мёбиусовых отображений T: $R^3 \to R^3$ и U: $R^3 \to R^3$, определяемых формулами*

$$T(x) = cW(x) + A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3, \quad U(x) = h(x) + B_1e_1 + B_2e_2,$$

в которых $c > 0$, $h > 0$, A_1, A_2, A_3, B_1 и B_2 — произвольные действительные числа, а W: $R^3 \to R^3$, $W(0) = 0$, — произвольное сохраняющее ориентацию изометрическое преобразование, имеет место равенство

$$\Phi(T \circ f \circ U^0, P_{T \circ f \circ U^0}) = T \circ \Phi(f, P_f) \circ U,$$

где $P_{T \circ f \circ U^0}(x_0, r) = P_f(U(x_0), hr) \circ W^{-1}$ для каждой точки $x_0 \in \tau$ и каждого числа $r > 0$ и удовлетворяет неравенству (1) для отображения $T \circ f \circ U^0$ при $x \in \tau$ и $|x - x_0| \leqslant r$, а $U^0 = U|\tau$.

Зададим теперь симплициальное разбиение полупространства $R_+{}^3 = \{x\colon x_3 > 0\}$, инвариантное относительно преобразований вида $x \to 2^p(x + ke_1 + me_2)$, где p, k и m — произвольные целые числа. Такое разбиение можно получить, например, следующим образом*. Разобьем сначала параллелепипед с вершинами e_3, $e_1 + e_3$, $e_1 + e_2 + e_3$, $e_2 + e_3$, ${}^1/{}_2e_3$, $e_1 + {}^1/{}_2e_3$, $e_1 + e_2 + {}^1/{}_2e_3$ и $e_2 + {}^1/{}_2e_3$ на 14 симплексов, вершины которых соответственно есть:

1) e_3, ${}^1/{}_2e_3$, ${}^1/{}_2(e_1 + e_3)$, ${}^1/{}_2(e_1 + e_2 + e_3)$;

2) $e_1 + e_3$, ${}^1/{}_2(e_1 + e_3)$, ${}^1/{}_2(e_1 + e_2 + e_3)$, $e_1 + {}^1/{}_2(e_2 + e_3)$;

3) $e_1 + e_3$, ${}^1/{}_2(e_1 + e_3)$, $e_1 + {}^1/{}_2(e_2 + e_3)$, $e_1 + {}^1/{}_2e_3$;

4) $e_1 + e_2 + e_3$, ${}^1/{}_2(e_1 + e_2 + e_3)$, $e_1 + {}^1/{}_2(e_2 + e_3)$, $e_1 + e_2 + {}^1/{}_2e_3$;

---

* Оценки, полученные далее для констант ε_2 и a, относятся именно к рассматриваемому конкретному разбиению $R_+{}^3$.

5) $e_1+e_2+e_3$, $\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3)$, $e_1+e_2+\frac{1}{2}e_3$, $\frac{1}{2}e_1+e_2+\frac{1}{2}e_3$;
6) e_2+e_3, $\frac{1}{2}(e_2+e_3)$, $\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3)$, $\frac{1}{2}e_1$, $e_2+\frac{1}{2}e_3$;
7) e_2+e_3, $\frac{1}{2}(e_2+e_3)$, $\frac{1}{2}e_1+e_2+\frac{1}{2}e_3$, $e_2+\frac{1}{2}e_3$;
8) e_3, $\frac{1}{2}e_3$, $\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3)$, $\frac{1}{2}(e_2+e_3)$;
9) e_3, e_1+e_3, $\frac{1}{2}(e_1+e_3)$, $\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3)$;
10) e_1+e_3, $e_1+e_2+e_3$, $e_1+\frac{1}{2}(e_2+e_3)$, $\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3)$;
11) $e_1+e_2+e_3$, e_2+e_3, $\frac{1}{2}e_1+e_2+\frac{1}{2}e_3$, $\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3)$;
12) e_2+e_3, e_3, $\frac{1}{2}(e_2+e_3)$, $\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3)$;
13) e_3, e_2+e_3, $e_1+e_2+e_3$, $\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3)$;
14) e_3, e_1+e_3, $e_1+e_2+e_3$, $\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3)$.

Затем при помощи преобразований вида $x\to 2^p(x+ke_1+me_2)$, где p, k и m — любые целые числа, распространим это разбиение на все полупространство R_+^3.

Для каждой пары f и P_f рассмотрим, наконец, непрерывное отображение $F=F(f,P_f):\overline{R_+^3}\to R^3$, совпадающее в вершинах симплексов построенного разбиения с отображением $\Phi(f,P_f)$, внутри каждого симплекса линейное и в точках плоскости τ равное f. Используя леммы 1—3, можно показать, что при $\varepsilon<50^{-1}\cdot 10^{-6}$ отображение F — $(1+1{,}5\cdot 10^6\,\varepsilon)$-квазиконформное. Продолжение f на все R^3 осуществляется аналогичным образом.

Отметим два следствия из теорем 1 и 2.

Следствие 1. *Существуют число* $\varepsilon_3>0$ *и функция* $\beta(\varepsilon)\geqslant 0$, $\beta(\varepsilon)\to\beta(0)=0$ *при* $\varepsilon\to 0$, *такие, что если неограниченная область* $D\subset R^n$ *может быть отображена* $1+\varepsilon$*-квазиконформно на шар* $B=\{x\colon |x|<1\}\subset R^n$ *с* $0\leqslant\varepsilon<\varepsilon_3$, *то существует* $\beta(\varepsilon)$*-почти мёбиусово преобразование* $f\colon \tau\to R^n$, *отображающее гиперплоскость* τ *на границу* ∂D *области* D.

В свою очередь, если для некоторой области D *существует* ε*-почти мёбиусово преобразование* $f\colon \tau\to R^n$ *с* $0\leqslant\varepsilon<\varepsilon_3$, *отображающее* τ *на* ∂D, *то область* D *можно отобразить* $1+\beta(\varepsilon)$*-квазиконформно на шар.*

Таким образом, вопрос о существовании квазиконформного отображения, близкого к конформному, неограниченной области на шар сводится к вопросу о существовании почти мёбиусова преобразования, отображающего гиперплоскость τ на границу области.

Следствие 2. *Существуют число* $\varepsilon_4>0$ *и функция* $\gamma(\varepsilon)\geqslant 0$, $\gamma(\varepsilon)\to\gamma(0)=0$ *при* $\varepsilon\to 0$, *такие, что всякое* $1+\varepsilon$*-квазиконформное отображение шара с* $0\leqslant\varepsilon<\varepsilon_4$ *продолжается* $1+\gamma(\varepsilon)$*-квазиконформно на все пространство* R^n.

В доказательствах первой части следствия 1 и следствия 2 существенным образом используется устойчивость конформных отображений пространства в замкнутом шаре ([5–7]).

Функции $\beta(\varepsilon)$ и $\gamma(\varepsilon)$ линейны.

В заключение отметим, что ранее автор уже предпринял попытку изучить поведение трехмерных квазиконформных отображений на плоских сечениях областей определения ([8]), но в настоящей заметке для пространственных квазиконформных отображений, близких к конформным, получены в этом направлении более глубокие результаты.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
14 VI 19

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. Г. Решетняк, Некоторые проблемы математики и механики, Новосибирск, 1961. [2] Ю. Г. Решетняк, ДАН, **152**, № 2, 286 (1963). [3] Ю. Г. Решетняк, Сиб. матем. журн., 8, № 1, 111 (1967). [4] Ю. Г. Решетняк, там же, **9**, № 667 (1968). [5] П. П. Белинский, ДАН, **147**, № 5, 1003 (1962). [6] П. П. Белинский, Некоторые проблемы математики и механики, «Наука», 1970. [7] П. П. Белинский, ДАН, **200**, № 4, 759 (1971). [8] А. П. Копылов, ДАН, **167**, № 4, 7 (1966).