Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 1

УДК 517.94 *МАТЕМАТИКА*

Г. Е. КАРАДЖОВ (БОЛГАРИЯ)

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ МЕТОДЕ «СРЕДНИХ» ДЛЯ КВАЗИНОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 16 XI 1972)

1. В заметке изложены результаты, связанные с изучением интерполяционных свойств одного класса квазинормированных (к.н.) пространств. Для нормированных пространств Лионс и Петре ([1], [2]) ввели K- и J-методы «средних». В работах ([3-5]) K-метод (дискретный и недискретный) переносится на случай к.н. пространств. Дискретный J-метод не обобщается. Это связано с отсутствием свойства субаддитивности (квазинорма лишь квазисубаддитивна ([3])). С другой стороны, для многих важных к.н. пространств (например, L_p, l_p; пространства Лоренца $L^{q,p}$, $l^{q,p}$ (см. ([3])); пространства вполне непрерывных операторов $\mathbf{S}_p$, $\mathbf{S}^{q,p}$ (см. ([6], [7])); пространства Харди H_p, $0<p\leqslant\infty$, $0<q<\infty$) некоторая положительная степень квазинормы субаддитивна. Это позволяет обобщить дискретный J-метод на случай таких пространств. При этом сохраняются все понятия и теоремы (исключая идеи двойственности), установленные в ([1], [2], [8]).

2. Дискретный J-метод «средних» для p-банаховых пространств. Пусть $p>0$. Линейное топологическое пространство F назовем p-нормированным, если на нем можно задать две эквивалентные * неотрицательные функции $f\to\|f\|_F$ и $f\to\|f\|_{pF}$, аннулирующиеся лишь при $f=0$ и такие, что $\|f_1+f_2\|_{pF}^p\leqslant\|f_1\|_{pF}^p+\|f_2\|_{pF}^p$, $\|\lambda f\|_F=|\lambda|\,\|f\|_F$, $\|-f\|_{pF}=\|f\|_{pF}$.

Нормированное пространство 1-нормировано; p-нормированное пространство к.н. Понятие p-нормированного пространства эквивалентно понятию линейного метрического пространства с метрикой, эквивалентной положительно однородной функции степени p. Полное p-нормированное пространство назовем p-банаховым.

Будем говорить, что пара (F_i), $i=0,1$, p_i-банаховых пространств совместна, если существует линейное топологическое отделимое пространство $\mathcal{F}$ такое, что $F_0, F_1\subset\mathcal{F}$ ($\subset$ означает линейное и непрерывное вложение). Тогда F_0+F_1 является полным линейным метрическим пространством с метрикой $\|f-g\|_{F_0+F_1}$, где

$$\|f\|_{F_0+F_1}=\inf\{[\|f_0\|_{p_0F_0}^{p_0}+\|f_1\|_{p_1F_1}^{p_1}];\,f=f_0+f_1, f_i\in F_i, i=0,1\}.$$

Пусть $e^{(i-\theta)n}f_n\in l^{r_i}(F_i)$, $0<r_i\leqslant\infty$, $0<\theta<1$, $i=0,1$. Тогда

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\|f_n\|_{F_0+F_1}\leqslant c\left[\left(\sum_{-\infty}^{\infty}e^{-\theta nr_0}\|f_n\|_{F_0}^{r_0}\right)^{p_0/r_0}+\left(\sum_{-\infty}^{\infty}e^{(1-\theta)nr_1}\|f_n\|_{F_1}^{r_1}\right)^{p_1/r_1}\right].$$

Поэтому ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}f_n$ сходится в F_0+F_1 и имеет смысл определение

$$F_{\theta r_0r_1}=(F_0,F_1)_{\theta r_0r_1}=\left\{f\in F_0+F_1;\,f=\sum_{-\infty}^{\infty}f_n,\,e^{(i-\theta)n}f_n\in l^{r_i}(F_i),\,i=0,1\right\}.\quad(1)$$

---

* $C_1\|f\|_F\leqslant\|f\|_{pF}\leqslant C_2\|f\|_F$, $C_i>0$; короче: $\|\cdot\|_F\asymp\|\cdot\|_{pF}$.

Это пространство q-банахово относительно следующих двух функций:

$$\|f\|_{F_{\theta r_0 r_1}} = \inf \max_{i=0,1} \| e^{(i-\theta)n} f_n \|_{l^{r_i}(F_i)},$$

$$\|f\|^q_{qF_{\theta r_0 r_1}} = \inf [\| e^{-\theta n} f_n \|^{q_0}_{l^{r_0}(p_0 F_0)} + \| e^{(1-\theta)n} f_n \|^{q_1}_{l^{r_1}(p_1 F_1)}],$$

$$1 / q = (1 - \theta) / q_0 + \theta / q_1, \quad q_i = \min (p_i, r_i), \; i = 0, 1,$$

где inf берется по всем представлениям элемента f в виде (1).

Ниже формулируются лишь те результаты (ограничиваясь наиболее типичными), которые не получаются в рамках общей теории к.н. пространств.

Теорема 1. *Если* (F_i) — *совместная пара* p_i-*банаховых пространств и* $1 / r_0 + 1 / r_1 > 0$, *то* $F_0 \cap F_1$ *плотно в* $F_{\theta r_0 r_1}$.

3. Эквивалентность K- и J-методов «средних».

Теорема 2. *Если* (F_i) — *совместная пара* p_i-*банаховых пространств, то*

$$(F_0, F_1)_{\theta r_0 r_1} = \{f \in F_0 + F_1; \;\; f = f_{0n} + f_{1n}, \quad n = 0, \pm 1, \ldots, e^{(i-\theta)n} f_{in} \in l^{r_i}(F_i)\}, \tag{2}$$

$$\|f\|_{F_{\theta r_0 r_1}} \asymp \inf \max_{i=0,1} \| e^{(i-\theta)n} f_{in} \|_{l^{r_i}(F_i)}, \qquad 0 < r_0, r_1 \leqslant \infty.$$

Теорема 3. *В условиях теоремы 2*

$$(F_0, F_1)_{\theta r_0 r_1} = \left\{ f \in F_0 + F_1; \|f\|^r_{(F_0, F_1)_{\theta r}} = \int_0^\infty t^{-\theta r} K^r (t, f; F_0, F_1) \frac{dt}{t} < \infty \right\}, \tag{3}$$

где $1 / r = (1 - \theta) / r_0 + \theta / r_1$ *и* $K(t, f; F_0, F_1) = \inf \{(\|f_0\|_{F_0} + t\|f_1\|_{F_1}); \; f = f_0 + f_1, f_i \in F_i\}$. *При этом* $\|f\|_{F_{\theta r_0 r_1}} \asymp \|f\|_{(F_0, F_1)_{\theta r}}$.

Замечание 1. Правые части формул (2) и (3) имеют смысл и эквивалентны и тогда, когда (F_i) лишь к.н. пространства (см. ([4], [5])).

Теорема 4. *Пусть* (A_i), (B_i), (C_i) — *совместные пары* a_i, b_i, p_i-*банаховых пространств соответственно и* T: $A_i \times B_i \to C_i$ *билинейное и непрерывное отображение. Положим*

$$1 / s_i + 1 / p_i = 1 / q_i + 1 / r_i; \quad q_i, \, r_i \geqslant p_i, \text{ если } s_i \geqslant p_i,$$

$$q_i = r_i = s_i, \text{ если } s_i < p_i, \; i = 0, 1.$$

Тогда T: $(A_0 + A_1) \times B_0 \cap B_1 \to C_0 + C_1$ *и*

$$\| T (a, b) \|_{C_{\theta s_0 s_1}} \leqslant c \| a \|_{A_{\theta q_0 q_1}} \| b \|_{B_{\theta r_0 r_1}}, \qquad a \in A_{\theta q_0 q_1}, \qquad b \in B_0 \cap B_1. \tag{4}$$

Замечание 2. Если $1 / r_0 + 1 / r_1 > 0$, то (по теореме 1) отображение T допускает продолжение по непрерывности, $\tilde{T}$: $A_{\theta q_0 q_1} \times B_{\theta r_0 r_1} \to C_{\theta s_0 s_1}$, с сохранением оценки (4).

Замечание 3. Аналогичная теорема имеет место и для полилинейных отображений.

4. Реитерация в пространствах «средних». Пусть (F_i) — совместная пара к.н. пространств. По определению к.н. пространство $F \supset F_0 \cap F_1$ принадлежит классу $J_\theta(F_0, F_1)$, $0 < \theta < 1$, если $\|a\|_F \leqslant c\|a\|^{1-\theta}_{F_0} \|a\|^{\theta}_{F_1}$, $a \in F_0 \cap F_1$.

Предложение 1. *Пусть* (F_i) — *совместная пара* p_i-*банаховых пространств и* r-*банахово пространство* $F \supset F_0 \cap F_1$, $F \subset F_0 + F_1$.

Тогда $F \in J_\theta(F_0, F_1) \Leftrightarrow (F_0, F_1)_{\theta r} \subset F, 0 < \theta < 1$.

По определению, к.н. пространство $F \subset F_0 + F_1$ принадлежит классу $K_\theta(F_0, F_1)$, если для любых $a \in F$ и $t > 0$ существует разложение $a = a_{0t} + a_{1t}$, $a_{it} \in F_i$, такое, что $\|a_{0t}\|_{F_0} \leqslant ct^\theta \|a\|_F$, $\|a_{1t}\|_{F_1} \leqslant ct^{\theta-1}\|a\|_F$.

Предложение 2. *Пусть* (F_i) — *совместная пара к.н. пространств и к.н. пространство* $F \subset F_0 + F_1$.

Тогда $F \in K_\theta(F_0, F_1) \Leftrightarrow F \subset (F_0, F_1)_{\theta\infty}, 0 < \theta < 1$.

Положим $P_\theta(F_0, F_1) = J_\theta(F_0, F_1) \cap K_\theta(F_0, F_1)$. Тогда из предложений 1, 2 непосредственно вытекает

Следствие 1. *В условиях предложения* 1

$$F \in P_\theta(F_0, F_1) \Leftrightarrow (F_0, F_1)_{\theta r} \subset F \subset (F_0, F_1)_{\theta\infty}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Теорема 5. *Пусть* (F_i) — *совместная пара* p_i*-банаховых пространств,* $0 \leqslant \theta_0 < \theta < \theta_1 \leqslant 1$ *и* r_i*-банаховы пространства* $G_i \in J_{\theta_i}(F_0, F_1)$ *образуют совместную пару. Тогда*

$$(F_0, F_1)_{(1-\eta)\theta_0+\eta\theta_1,\, p} \subset (G_0, G_1)_{\eta,\, p}, \quad 0 < \eta < 1,\ 0 < p \leqslant \infty.$$

Теорема 6. *Пусть* (F_i) — *совместная пара к.н. пространств,* $0 \leqslant \theta_0 < \theta < \theta_1 \leqslant 1$ *и к.н. пространства* $G_i \in K_{\theta_i}(F_0, F_1)$, $i = 0, 1$. *Тогда*

$$(G_0, G_1)_{\eta,\, p} \subset (F_0, F_1)_{(1-\eta)\theta_0+\eta\theta_1,\, p}, \quad 0 < \eta < 1,\ 0 < p \leqslant \infty.$$

Из теорем 5, 6 вытекает

Следствие 2. *В условиях теоремы* 5, *если* $G_i \in P_{\theta_i}(F_0, F_1)$, *то*

$$(G_0, G_1)_{\eta,\, p} = (F_0, F_1)_{(1-\eta)\theta_0+\eta\theta_1,\, p}, \quad 0 < \eta < 1,\ 0 < p \leqslant \infty.$$

Сформулированные результаты относятся к случаю $\theta_0 \neq \theta_1$. Для исследования случая $\theta_0 = \theta_1$ необходимо следующее построение. Пусть (F_i) — совместная пара p_i-банаховых пространств, $0 < \theta < 1$, $0 < q < \infty$, $0 < r \leqslant \infty$. Тогда, по определению (ср. ([8])),

$$(F_0, F_1)_\theta^{qr} = \left\{a \in F_0 + F_1;\ a = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n,\ e^{(i-\theta)n}\|a_n\|_{F_i} \in l^{q,r}\right\},$$

где $l^{q,r}$ есть пространство* Лоренца числовых последовательностей. Это естественно p-банахово пространство, $1/p = (1-\theta)/\min(p_0, r) + \theta/\min(p_1, r)$.

Теорема 7. *Пусть* (F_i) — *совместная пара* p_i*-банаховых пространств,* $0 < q < \infty$, $0 < r \leqslant \infty$, $0 < \alpha$, $\theta < 1$. *Тогда*

$$((F_0, F_1)_{\theta q_0}, (F_0, F_1)_{\theta q_1})_{\alpha, r} = (F_0, F_1)_\theta^{qr}, \; q_0 \neq q_1, \; 1/q = (1-\alpha)/q_0 + \alpha/q_1.$$

Теорема 8. *Пусть* (F_i) — *совместная пара* p_i*-банаховых пространств,* $0 \leqslant \theta_0 < \theta < \theta_1 \leqslant 1$ *и* r_i*-банаховы пространства* $X_i \in J_{\theta_i}(F_0, F_1)$ *образуют совместную пару. Пусть* (G_i) — *совместная пара к.н. пространств и к.н. пространства* $Y_i \in K_{\theta_i'}(G_0, G_1)$, $0 \leqslant \theta_0' < \theta' < \theta_1' \leqslant 1$.

Тогда, если $T\colon X_i \to Y_i$ — *линейное и непрерывное отображение с квазинормой* M_i, $i = 0, 1$, *то* $T\colon\ (F_0, F_1)_{\theta p} \to (G_0, G_1)_{\theta' p}$ *с квазинормой* $M \leqslant CM_0^{1-\eta} M_1^\eta$, *где* $\eta = (\theta - \theta_0)/(\theta_1 - \theta_0) = (\theta' - \theta_0')/(\theta_1' - \theta_0')$.

---

* $l^{q,r} = \left\{a = (a_n);\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/q-1} a_n^{*r} < \infty\right\}$, $\{a_n^*\}_1^\infty$ есть перестановка чисел $\{|a_n|\}_{-\infty}^{\infty}$ в невозрастающем порядке.

Теорема 8 является интерполяционной типа теоремы Марцинкевича; ср. ([9]).

В заключение автор выражает благодарность М. З. Соломяку за постоянное внимание к работе.

Поступило
28 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] I. L. Lions, J. Peetre, Publ. Math. de l'IHES, **19**, 5 (1964). [2] J. Peetre, Ric. Matem., **12**, 2 (1963). [3] P. Krée, Ann. Inst. Fourier, **17**, 2 (1968). [4] J. Peetre, Studia Mathem., **34**, 1 (1970). [5] T. Holmstedt, Math. Scand., **26**, 1 (1970). [6] С. Ю. Ротфельд, Сборн. Проблемы математической физики, в. 3, 1968. [7] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию несамосопряженных операторов, «Наука», 1965. [8] C. A. Bernstein, N. L. Kerzman, C. R., Sér. A, **263** (1966). [9] К. К. Головкин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, **106** (1969).