Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 4

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

А. А. НОВРУЗОВ

О НЕКОТОРЫХ КРИТЕРИЯХ РЕГУЛЯРНОСТИ ГРАНИЧНЫХ ТОЧЕК ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ И КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 19 VI 1972)

В этой заметке рассматриваются следующие уравнения:

1) $$Lu = a^{ik}(t, x)u_{x_ix_k} + b^i(t, x)u_{x_i} + c(t, x)u - u_t = 0, \tag{1}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$\lambda_1|\alpha|^2 \leqslant a^{ik}(t, x)\alpha_i\alpha_k \leqslant \lambda_2|\alpha|^2, \quad |b_i(t, x)| \leqslant C_0, \ |C(t, x)| \leqslant C_0; \tag{2}$$

$$|a^{ik}(t,x) - a^{ik}(\tau, y)| \leqslant \varphi(\sqrt{|x-y|^2 + |t-\tau|}), \quad \int\limits_0 \varphi(\xi)\xi^{-1}d\xi < \infty, \tag{3}$$

где λ_1, λ_2, C_0 — положительные константы, $\varphi(\xi)$ — неубывающая функция от ξ, $0 < \xi < \xi_0$, а $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $0 < t \leqslant T$;

2а) $$a^{ik}(t, x, u)u_{x_ix_k} + b(t, x, \nabla u) - u_t = 0, \tag{4}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$\alpha_3|\alpha|^2 \leqslant a^{ik}(t, x, \xi)\alpha_i\alpha_k \leqslant \lambda_4|\alpha|^2, \tag{5}$$

$$|b(t, x, \xi, \eta)| \leqslant \mu(\xi)|\eta|^2 + C_1, \tag{6}$$

$$\int\limits_0^{\xi_0} \mu^{-1}(\xi)d\xi < \infty; \tag{7}$$

б) $$a^{ik}(t, x)u_{x_ix_k} + b(t, x, u, \nabla u) - u_t = 0; \tag{8}$$

коэффициенты уравнения (8) удовлетворяют условиям

$$\alpha_4|\alpha|^2 \leqslant a^{ik}(t, x)\alpha_i\alpha_k \leqslant \lambda_5|\alpha|^2, \tag{9}$$

$$|a^{ik}(t,x) - a^{ik}(\tau, y)| \leqslant \psi(\sqrt{|x-y|^2 + |t-\tau|}), \quad \int\limits_0 \frac{\psi(\xi)\,d\xi}{\xi} < \infty, \tag{10}$$

$$|b(t, x, \xi, \eta)| \leqslant \mu(\xi)|\eta|^2 + C_2, \quad \int\limits_0 \mu^{-1}(\xi)d\xi < \infty, \tag{11}$$

$$|b| + |b_t| + |b_\xi| + (1 + |\eta|)|b_{\eta_i}| \leqslant B_0(1 + |\eta|^2), \tag{12}$$

где λ_4, λ_5, C_2, B_0 — константы, а $\psi(\xi)$ — неубывающая функция на $(0, \xi_0)$.

Введем следующие обозначения: D — ограниченная область в $(n+1)$ мерном эвклидовом пространстве $(t, x) \in R^{n+1}$; $Ц_{x^0,R}^{t_1,t_2}$ — цилиндр, определяемый неравенствами $|x - x^0| < R$, $t_1 < t < t_2$; $S_{x^0,R}^{t_1,t_2}$ — боковая поверхность цилиндра $Ц_{x^0,R}^{t_1,t_2}$; $Q_{x^0,R}^{t_1}$ и $Q_{x^0,R}^{t_2}$ — соответственно нижнее и верхнее основания цилиндра $Ц_{x^0,R}^{t_1,t_2}$.

Пусть $u(t, x)$ есть решение уравнения (4) и

$$\mathscr{E} = A^{ik}(t, x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial t}, \text{ где } A^{ik}(t, x) = a^{ik}(t, x, u(t, x)).$$

Тогда
$$\lambda_3|\alpha|^2 \leqslant A^{ik}(t,\ x)\alpha_i\alpha_k \leqslant \lambda_4|\alpha|^2. \tag{13}$$

Определение 1. Пусть в области D дана задача Дирихле для уравнения (1). Точка $(t^0,\ x^0) \in FD$ называется регулярной граничной точкой относительно задачи Дирихле, если обобщенное решение в смысле Винера этой задачи непрерывно в точке (t^0, x^0).

Определение 2. Пусть в $D \subset R^{n+1}$ дан оператор $\mathscr{E}$, определяемый константами λ_3, λ_4 неравенства (13). Точка $(t^0,\ x^0) \in FD$ называется λ_3, λ_4-регулярной относительно оператора $\mathscr{E}$, если выполнены условия: для любых пар $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что, какова бы ни была область $D' \subset D$, целиком лежащая в полупространстве $t < t^0$, каков бы ни был оператор $\mathscr{E}$ с константами λ_3, λ_4, определенный в D', какова бы ни была субпараболическая для этого оператора функция $u(t,\ x)$, ограниченная в D' и не превосходящая нуля на пересечении границы D' с ε_1-окрестностью точки $(t^0,\ x^0)$, в пересечении D' с δ-окрестностью точки (t^0, x^0) выполняется неравенство $u(t,\ x) < \varepsilon_2$.

Лемма 1. *Пусть в цилиндре $Ц_{0,R}^{0,T}$, $R \leqslant 1$, определен оператор L, удовлетворяющей условиям* (2) *и* (3).

Тогда существует функция $f_+(t,\ x)$, для которой имеют место неравенства
$$Lf_+(t,\ x) \geqslant 0, \quad 0 < f_+(t,\ x) \leqslant C_3 G(t,\ x),$$

где $G(t,x) = \begin{cases} t^{-n/2}\exp\left(-\dfrac{|x|^2}{4t}\right) & \text{при} \quad t > 0, \\ 0 & \text{при} \quad t \leqslant 0, \end{cases}$

а $C_3 > 0$ — константа, зависящая только от констант λ_1, λ_2, n, T, C_0 и функции φ.

Лемма 2. *Пусть в цилиндре $Ц_{0,R}^{0,T}$, $R \leqslant 1$, определен оператор L, удовлетворяющий условиям* (2). *Пусть функция $\varphi(\xi)|\ln \xi|$ удовлетворяет условию Дини.*

Тогда существует функция $f_-(t,\ x)$, для которой при $|x|^2 \leqslant t|\ln t|$ выполняются неравенства
$$Lf_-(t,\ x) \leqslant 0, \quad C_4 G(t,\ x) \leqslant f_-(t,\ x) \leqslant C_5 G(t,\ x),$$

где $C_4 > 0$, $C_5 > 0$ — константы, зависящие только от λ_1, λ_2, C_0, n, T и функции φ, а $G(t,\ x)$ — функция леммы 1. *Пусть E — B-множество пространства $(t,\ x) \in R^{n+1}$. Пусть точка $(t^0,\ x^0)$ такова, что E лежит целиком в полупространстве $t < t^0$.*

Рассмотрим всевозможные меры μ, определенные на E и такие, что
$$\int_E G(t-\tau, x-y)\,d\mu(\tau, y) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (t, x) \notin E, \tag{14}$$

где
$$G(t-\tau, x-y) = \begin{cases} (t-\tau)^{-n/2}\exp\left(-\dfrac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}\right) & \text{при} \quad t > \tau, \\ 0 & \text{при} \quad t \leqslant \tau. \end{cases}$$

Назовем потенциалом множества E в точке $(t^0,\ x^0)$ число $\gamma(E,\ t^0,\ x^0) = \sup \int_E G(t^0-\tau,\ x^0-y)\,d\mu(\tau,\ y)$, где верхняя грань берется по всем мерам, удовлетворяющим неравенству (14) (см. ([1])).

Определим две последовательности чисел $\{\rho_m\}$ и $\{\tau_m\}$, где ρ_m определяется рекуррентно: $\rho_0 = 1/2$, $\rho_{m+1} = \rho_m / \sqrt{|\ln \rho_m|}$, а τ_m определяется через ρ_m из условия $4n\tau_m |\ln \tau_m| = \rho_{m-2}^2$.

Пусть точка (t^0, x^0) принадлежит границе D. Обозначим через H дополнение к области D и пусть H_m — пересечение H с полосой $t^0-\tau_m \leqslant t \leqslant t^0-\tau_{m+1}$. Обозначим через γ_m потенциал множества H_m относительно точки (t^0, x^0).

Теорема 1. *Пусть точка* $(t^0, x^0) \in FD$ *и в* D *определен оператор* L, *удовлетворяющий условиям* (2) *и* (3). *Для того чтобы точка* $(t^0, x^0) \in FD$ *была регулярной для уравнения* (1) *в смысле определения* 1, *достаточно, чтобы ряд* $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m$ *расходился, а в случае, когда функция* $\varphi(\xi)|\ln \xi|$ *удовлетворяет условию Дини (равномерно), это условие является и необходимым.*

Доказательство этой теоремы получается из лемм 1 и 2.

Следствие 1. Если функция $\varphi(\xi)|\ln \xi|$ удовлетворяет условию Дини (равномерно), то условие регулярности граничных точек для уравнения (1) относительно задачи Дирихле совпадает с условием регулярности граничных точек для уравнения теплопроводности.

Пусть β_m — S-параболическая емкость множества $Ц^m \setminus D$ (см. ([2])), где $Ц^{t^0-b\cdot 8^{-2m}, t^0}_{x^0, 8^{-(m+1)}} = Ц^m$, а b — число, зависящее от λ_3, λ_4 и n.

Теорема 2. *Пусть* $(t^0, x^0) \in FD$ *и в* D *определено уравнение* (4) *с коэффициентами, удовлетворяющими условиям* (5), (6) *и* (7). *Для того чтобы точка* $(t^0, x^0) \in FD$ *была* λ_3, λ_4-*регулярной для уравнения* (4), *достаточно, чтобы ряд* $\sum_{m=1}^{\infty} 8^{sm\beta}m$ *расходился, где* $s>0$ — *число, зависящее только от* λ_3, λ_4 *и* n.

Следствие 2. Условие регулярности в смысле определения 2 для уравнения (4) совпадает с условием регулярности для оператора $\mathscr{E}$.

Теорема 3. *Пусть в* D *определено уравнение* (8), *для которого выполняются условия* (9), (10) *и* (11). *Для того чтобы* $(t^0, x^0) \in FD$ *была* λ_3, λ_4-*регулярной, достаточно, чтобы ряд* $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m$ *расходился, где* γ_m *имеет тот же смысл, что и в теореме* 1.

Теорема 4. *Пусть в* D *определено уравнение* (8) *и коэффициенты этого уравнения удовлетворяют условиям* (9) *и* (12). *Пусть функция* $\varphi(\xi)|\ln \xi|$ *удовлетворяет условию Дини (равномерно). Пусть* $(t^0, x^0) \in FD$. *Для того чтобы точка* $(t^0, x^0) \in FD$ *была регулярной в смысле определения* 1 *для уравнения* (8), *необходимо и достаточно, чтобы ряд* $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m$ *расходился*

Следствие 3. Условие регулярности для квазилинейного уравнения типа (8) совпадает с условием регулярности для уравнения теплопроводности относительно задачи Дирихле.

Автор выражает глубокую благодарность проф. Е. М. Ландису за обсуждение этой работы.

Азербайджанский институт нефти и химии
им. М. Азизбекова
Баку

Поступило
18 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. М. Ландис, ДАН, 185, № 3 (1969). [2] Е. М. Ландис, Уравнения 2-го порядка эллиптического и параболического типов, «Наука», 1971.