Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 4

УДК 513.88:513.83+517 *МАТЕМАТИКА*

А. А. СЕДАЕВ

ОПИСАНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОСТРАНСТВ ПАРЫ $(L^p_{a_0}, L^p_{a_1})$ И НЕКОТОРЫЕ РОДСТВЕННЫЕ ВОПРОСЫ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 15 VI 1972)

Пусть банаховы пространства E_0, E_1 образуют (интерполяционную) пару, т. е. существует некоторое отделимое топологическое векторное пространство $\mathscr{E}$, в которое E_0, E_1 непрерывно вложены ([1, 2]). В этом случае обычным образом возникают банаховы пространства E_0+E_1 и $E_0 \cap E_1$ ([2]). Будем считать, что в них определены нормы

$$\|x\|_{E_0+E_1} = \inf_{\substack{x=x_0+x_1 \\ x_i \in E_i}} \max(\|x_0\|_{E_0}, \|x_1\|_{E_1}), \qquad \|x\|^c_{E_0 \cap E_1} = \max\left(\|x\|_{E_0}, \frac{1}{c}\|x\|_{E_1}\right),$$

где $0 < c < \infty$.

Обозначим через $G = G(E_0, E_1)$ множество линейных операторов T, действующих в E_0+E_1 и таких, что $T|_{E_i}: E_i \to E_i$, $\|T\|_{E_i \to E_i} \leqslant 1$, $i = 0, 1$. Банахово пространство E, непрерывно вложенное в E_0+E_1, называется и н т е р п о л я ц и о н н ы м (c-интерполяционным) пространством пары (E_0, E_1), если всякий оператор T из G непрерывно действует в E (и $\|T\|_{E\to E} \leqslant c$).

Важной задачей интерполяции является описание для заданной пары (E_0, E_1) всех ее интерполяционных пространств. Существенный результат в этом направлении был получен Кальдероном ([3]), в удобной форме им были описаны все интерполяционные пространства пары (L^1, L^∞). Лоренц и Шимогаки ([4]) обобщили этот результат на пары пространств (L^p, L^∞) функций, определенных на некотором интервале $(0, l)$, $l \leqslant \infty$, $1 \leqslant p < \infty$.

Т е о р е м а 1*. *Для того чтобы банахово пространство $E \subset L^p + L^\infty$ было интерполяционным, необходимо и достаточно, чтобы из соотношения*

$$\int_0^t x^{*p}\,ds \leqslant \int_0^t y^{*p}\,ds, \quad 0 < t < l, \tag{1}$$

и условия $y \in E$ вытекало, что $x \in E$.

Если E есть c-интерполяционное пространство, то (1) влечет $\|x\|_E \leqslant$ $\leqslant c\|y\|_E$. Наоборот, если E таково, что (1) влечет $\|x\|_E \leqslant c\|y\|_E$, где c не зависит от x и y, то E является $\lambda_p c$-интерполяционным пространством.

Здесь x^* означает неубывающую функцию, равноизмеримую с $|x|$, а $\lambda_p \in (1, 2^{1/q})$, $1/p + 1/q = 1$.

Пусть $L_a{}^p$ — пространство (классов) функций x, определенных на некотором локально компактном пространстве M, снабженном мерой Радона μ, и таких, что

$$\|x\|_{L^p_a} = \begin{cases} \left(\int_M |xa|^p\,d\mu\right)^{1/p} < \infty, & p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup} |xa| < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

* В работе ([4]) утверждение теоремы 1 было доказано лишь для пространств E, обладающих свойством Фату. Уточнение удалось получить благодаря следствию 1 теоремы 3.

Ниже предлагается описание интерполяционных пространств пары $(L_{a_0}^p, L_{a_1}^p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *. Для $p = 1$ это было сделано Семеновым ([5]).

Теорема 2. *Для того чтобы банахово пространство $E \subset L_{a_0}^p + L_{a_1}^p$ было интерполяционным, необходимо и достаточно, чтобы из соотношения*

$$\int_M |x \min(a_0, ta_1)|^p \, d\mu \leqslant \int_M |y \min(a_0, ta_1)|^p \, d\mu, \quad 0 < t < \infty, \tag{2}$$

и условия $y \in E$ вытекало, что $x \in E$.

Если E есть c-интерполяционное пространство, то (2) влечет $\|x\|_E \leqslant \leqslant c\|y\|_E$. Наоборот, если E таково, что соотношение (2) влечет $\|x\|_E \leqslant \leqslant c\|y\|_E$, где c не зависит от x и y, то E является $\alpha_p c$-интерполяционным пространством, $1 \leqslant \alpha_p \leqslant 2^{1/q}$, $1/p + 1/q = 1$.

При $p = \infty$ можно получить более точный результат. Оказывается, что для c-интерполяционности $E \subset L_{a_0}^\infty + L_{a_1}^\infty$, необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$\operatorname{ess\,sup} |x| (a_0^{-1} + t^{-1} a_1^{-1})^{-1} \leqslant \operatorname{ess\,sup} |y| (a_0^{-1} + t^{-1} a_1^{-1})^{-1}, \quad 0 < t < \infty,$$

и условие $y \in E$ влекли $\|x\|_E \leqslant c\|y\|_E$.

Сформулированные теоремы объединяет то, что характеризация интерполяционных пространств на самом деле дается в терминах K-функционала Питре ([2, 6]). Действительно, полагая для произвольной пары (E_0, E_1)

$$K_p(t, x, E_0, E_1) = \inf_{\substack{x = x_0 + x_1 \\ x_i \in E_i}} (\|x_0\|_{E_0}^p + t^p \|x_1\|_{E_1}^p)^{1/p}, \quad 0 < t < \infty, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

имеем

$$K_p(t, x, L^p, L^\infty) \leqslant \left(\int_0^t x^{*p} \, ds\right)^{1/p} \leqslant \lambda_p K_p(t, x, L^p, L^\infty), \quad x \in L^p + L^\infty,$$

$$K_p(t, x, L_{a_0}^p, L_{a_1}^p) \leqslant \left(\int_M |x \min(a_0, ta_1)|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \alpha_p K_p(t, x, L_{a_0}^p, L_{a_1}^p),$$
$$x \in L_{a_0}^p + L_{a_1}^p.$$

Отметим также следующее обстоятельство. Теоремы 1, 2 доказывались авторами по одной и той же схеме. Сначала устанавливали их конечномерный аналог, а потом делали тот или иной переход к бесконечномерному случаю. С этой точки зрения полезными оказываются найденные в ([7]) условия компактности и замкнутости множества G, наделенного той или иной операторной топологией.

Пусть $\Gamma \subset (E_0 + E_1)^*$ такой линеал, что $E_0 + E_1$ и Γ находятся в двойственности. Топология $\sigma(E_0 + E_1, \Gamma)$ порождает во множестве L непрерывных эндоморфизмов $E_0 + E_1$ слабую операторную топологию, которую будем называть Γ-топологией. Пусть U_0, U_1 — единичные шары пространств E_0, E_1, и $a = \inf\limits_{x \in E_0 \cap E_1} \dfrac{\|x\|_{E_1}}{\|x\|_{E_0}}$, $b = \inf\limits_{x \in E_0 \cap E_1} \dfrac{\|x\|_{E_1}}{\|x\|_{E_0}}$.

Теорема 3. *Множество G замкнуто в L в Γ-топологии тогда и только тогда, когда:*

1) *при любом c, $a \leqslant c \leqslant b$, множество $U_0 \cap cU_1$ $\sigma(E_0 + E_1, \Gamma)$-замкнуто в $E_0 + E_1$;*

2) *если $E_0 \cap E_1$ не плотно в E_0 (E_1), то U_0 (U_1) тоже $\sigma(E_0 + E_1, \Gamma)$-замкнуто в $E_0 + E_1$.*

---

* Веса a_0, a_1 не предполагаются, вообще говоря, почти всюду конечными. Это позволяет включить в рассмотрение пары пространств $(L_{a_0}^p(M_0), L_{a_1}^p(M_1))$, определенных на разных M_0 и M_1.

Множество G компактно в Γ-*топологии в том и только в том случае, если, кроме условий* 1), 2), *выполнено условие*

3) *хотя бы одно из пространств* $E_0 \cap E_1$ (*с нормой* $\|\cdot\|^c_{E_0\cap E_1}$, $a \leqslant c \leqslant b$), E_0, E_1 *или* $E_0 + E_1$ *одновременно плотно в* $E_0 + E_1$ *и имеет* $\sigma(E_0 + E_1, \Gamma)$-*компактный единичный шар.*

Следствие 1. *Пусть* $x, y \in E_0 + E_1$. *Если множество* G Γ-*компактно и существуют операторы* $T_\nu \in G$, $\nu \in J$, *такие, что сеть* $T_\nu x$ *сходится к* y *в топологии* $\sigma(E_0 + E_1, \Gamma)$, *то найдется оператор* $T \in G$ *такой, что* $Tx = y$.

Ввиду следствия 1 переход к бесконечномерному случаю в теоремах 1, 2 становится тривиальным.

Поскольку для каждой пары гильбертовых пространств (H_0, H_1) и каждого $\varepsilon > 0$ найдутся пара $(L_{a_0}^2, L_{a_1}^2)$ и оператор J: $H_0 + H_1 \to L_{a_0}^2 + L_{a_1}^2$ такие, что $J|_{H_i}$: $H_i \to L_{a_i}^2$ и

$$(1-\varepsilon)\|x\|_{H_i} \leqslant \|Jx\|_{L^2_{a_i}} \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|_{H_i}, \quad x \in H_i, \quad i = 0, 1,$$

то из теоремы 2 вытекает

Теорема 4. *Для того чтобы* $E \subset H_0 + H_1$ *было интерполяционным пространством пары* (H_0, H_1), *необходимо и достаточно, чтобы из соотношения*

$$K_2(t, x, H_0, H_1) \geqslant K_2(t, y, H_0, H_1), \quad 0 < t < \infty, \tag{3}$$

и условия $y \in E$ *следовало, что* $x \in E$.

Если E есть c-интерполяционное пространство, то (3) влечет неравенство $\|x\|_E \leqslant \beta_2 c \|y\|_E$, $1 \leqslant \beta_2 \leqslant \sqrt{2}$. Наоборот, если E таково, что (3) влечет неравенство $\|x\|_E \leqslant c\|y\|_E$, где c не зависит от x и y, то E является c-интерполяционным пространством.

Эта теорема примыкает к результату Донохью ([8]), описавшему все гильбертовы интерполяционные пространства пары (H_0, H_1).

Теорема 5. *Если мера* μ *на пространстве* M *вполне* σ-*конечна, то среди интерполяционных пространств пары* $(L_{a_0}^p, L_{a_1}^p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *найдутся несепарабельные в том и только том случае, если веса* a_0, a_1 *неэквивалентны.*

Автор выражает искреннюю благодарность С. Г. Крейну и Е. М. Семенову за внимание к работе и советы.

Научно-исследовательский институт математики
Воронежского государственного университета
им. Ленинского комсомола

Поступило
6 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Madженес, УМН, 21, в. 2, 128 (1966). [2] P. L. Butzer — H. Berens, Semi-groups of Operators and Approximation, Berlin, 1975. [3] A. P. Calderón, Stidia Math., 26, 273 (1966). [4] G. Lorentz, T. Shimogaki, Trans. Am. Math. Soc., 159, 207 (1971). [5] А. А. Седаев, Е. М. Семенов, Оптимизация, 4, Новосибирск, 1971. [6] J. Peetre, Acta Sci. Math., 25, 255 (1964). [7] А. А. Седаев, Тр. Н.-и. инст. матем., Воронежск. гос. унив., в. 3 (1971). [8] W. Donoghue, Acta Math., 118, 251 (1967)