Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 4

УДК 531.51 *АСТРОНОМИЯ*

Н. Р. СИБГАТУЛЛИН

ОБ ЭФФЕКТАХ РАССЕЯНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ «ЧЕРНОЙ ДЫРЫ»

(Представлено академиком Л. И. Седовым 11 VII 1972)

Уравнения электромагнитного поля в вакууме Максвелла и гравитационного поля Эйнштейна имеют (как известно) своими бихарактеристиками изотропные геодезические, причем характеристические многообразия этих уравнений являются функциями действия для геодезических и подчиняются уравнению эйконала. В работе ([1]) (см. также ([2])) изучено поведение коротковолновых возмущений произвольного электромагнитного и гравитационного фона и выяснен характер обратного влияния «шума» волн на эволюцию основного фона *. Решения задачи Коши для таких возмущений, в начальный момент отличных от нуля лишь в достаточно малой области (волновые пакеты), затем локализуются в окрестности соответствующей бихарактеристики и представляют классический переход от волны к частице ([3]).

Однако такой подход не дает правильной асимптотики решения задачи Коши при наличии в конгруэнции бихарактеристик неустойчивого предельного цикла. Для волновых пакетов, траектории которых вначале близки к бихарактеристике, наматывающейся на предельный цикл, необходимо учитывать эффекты рассеяния. В настоящей статье развит асимптотический метод, позволяющий эффективно вычислить коэффициенты отражения и прохождения волн в поле Шварцшильда.

Основой для исследования служат уравнения, являющиеся следствиями уравнений Эйнштейна и Максвелла (линеаризованных вокруг решения Шварцшильда):

$$\partial^2 Q(\partial r^*)^2 - \partial^2 Q / \partial t^2 + (1 - r_g / r) r^{-2} \Delta Q + V(r) Q = 0; \tag{1}$$

здесь $V(r) = 3r_g r^{-3}(1 - r_g / r)$ для гравитационных волн нечетного типа ([4]);

$$V(r) = 3r_g r^{-3}(1 - r_g/r)\,[\Delta^2 - 4 + 6r_g/r - 3r_g^2/r^2]\,(\Delta + 2 - 3r_g/r)^{-1}$$

для гравитационных волн четного типа ([5]); $V(r) = 0$ для электромагнитных волн нечетного типа. Здесь Δ — оператор Лапласа на единичной сфере; $r^* = r + r_g \ln(r / r_g - 1)$. Г. А. Алексеевым и мною показано, что эти уравнения описывают возмущения инвариантов гравитационного поля: для четных возмущений метрики $Q = (\Delta + 2 - 3r_g / r)^{-1} \delta I_1 / I_1$, для нечетных возмущений $Q = \delta I_2 / I_1$. Здесь $I_1 = R_{ikem} R^{ikem}$; $I_2 = R^{ik}{}_{em} R_{iknp} \varepsilon^{empn}$.

Разложим функцию Q в интеграл Фурье по времени и по сферическим полиномам с индексами $l \geqslant 2$ (при $l = 1$ вывод уравнения (1) теряет силу).

---

* Квадратичные поправки к тензору Риччи за счет высокочастотных возмущений имеют вид тензора энергии — импульса частиц с массой нуль. Функция распределения этих частиц подчиняется уравнению Лиувилля, которое необходимо решать совместно с осредненными уравнениями Эйнштейна ([2]).

Уравнение (1) тогда перепишется в виде *

$$d^2Q(dr^*)^2 + \Phi(r)Q = 0; \qquad \Phi = \omega^2 - (l+1)lr^{-2}(1 - r_g/r) + V(r). \quad (2)$$

Уравнение $\Phi(r) = 0$ имеет два действительных корня r_1 и r_2 в интервале $(r_g, +\infty)$ при $\omega < \omega_0(l)$, кратный корень при $\omega = \omega_0(l)$ и два комплексно сопряженных корня с действительной частью, принадлежащей $(r_g, +\infty)$ при $\omega > \omega_0(l)$. Функция $\Phi(r)$ является монотонной в интервале $(r_g, \tilde{r})$ и $(\tilde{r}, +\infty)$: в точке $r = \tilde{r}$ функция $\Phi(r)$ имеет минимум.

Теорема. *Существует взаимно однозначное преобразование переменной r^* на всей оси $r^* \in (-\infty, +\infty)$: $r^* = f(\xi)$ и искомой функции: $Q = \sqrt{dr^*/d\xi}D(\xi)$ такое, что (2) преобразуется в уравнение Вебера (параболического цилиндра) для $D(\xi)$.*

$$d^2D/(d\xi)^2 + (\xi^2 + m)D = 0. \quad (3)$$

Действительно, сделаем подстановку

$$r^* = f(\xi), \qquad Q = \sqrt{dr^*/d\xi}D(\xi).$$

Доказательство теоремы сводится к доказательству существования решения уравнения

$$\Phi(r)(f')^2 - \sqrt{f'}d^2(f')^{-1/2}/(d\xi)^2 = \xi^2 + m; \qquad f' \equiv df/d\xi. \quad (4)$$

Искомую функцию $f(\xi)$ и константу m находим методом последовательных приближений:

$$r^* = f_0(\xi) + f_1(\xi) + f_2(\xi) + \ldots; \qquad m = m_0 + m_1 + \ldots$$

а) При $\omega < \omega_0$ нулевое приближение строим из (4) так:

$$\int_{r_1}^{r} \frac{\sqrt{\Phi(r)}}{1 - r_g/r} = \int_{-a_0}^{\xi} \sqrt{\xi^2 - a_0^2}; \qquad \frac{\pi a_0^2}{2} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{\Phi(r)}}{1 - r_g/r} dr; \qquad m_0 = -a_0^2.$$

При этом $r^* \approx \xi^2$ при $\xi \to +\infty$ и $r^* \approx -\xi^2$ при $\xi \to -\infty$. Ошибка при использовании этого приближения стремится к нулю при $|\xi| \to \infty$ как $-{}^3/_4\xi^{-2}$.

Следующее приближение ищем из уравнения

$$-\sqrt{f_0'}\, d^2(f_0')^{-1/2}/(d\xi)^2 + \Phi(f_0)\, 2f_0'f_1' + \Phi'(f_0)\, f_1(f_0')^2 = m_1. \quad (5)$$

Из условия конечности $f_1(\xi)$ при $\xi = \pm a_0$ находим $m_1, \ldots$

б) При $\omega > \omega_0(l)$ в качестве нулевого приближения для решения (4) возьмем $f_0(\xi)$ из равенства

$$\int_{r_1}^{r} \frac{\sqrt{\Phi(r)}}{1 - r_g/r} dr = \int_{-ia_0}^{\xi} \sqrt{\xi^2 + a_0^2}\, d\xi, \quad (6)$$

где r_1 — комплексный корень уравнения $\Phi(r) = 0$. Приравнивая мнимые части (6), определяем a_0. Рассматривая первое приближение также в комплексной области, определяем константу интегрирования и m_1 из требования ограниченности решения (5) при $r = \alpha \pm i\beta$ $(r_1 = \alpha - i\beta)$.

Примечание к пп. а) и б). При $r_g^2\omega^2 \gg 1$ и $p^2 \equiv (l+1)l/\omega^2 \neq {}^{27}/_4 r_g^2 + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$ для первых приближений верны равенства $f_1(\xi) = O(\omega^{-2}r_g^{-2})$, $m_1 = O(\omega^2 r_g^{-2})$.

Для нахождения асимптотического решения уравнения (3) при $|\xi/\sqrt{m}| \gg 1$ используем теорию вырожденной гипергеометрической функ-

* В работе ([6]) исследована асимптотика законов затухания Q при больших r (тогда $V(r) \approx 3r_g/r^3$) для задачи Гурса с начальными данными на характеристиках (2): $t + r^* = a = \text{const}$, $t - r^* = b = \text{const}$, причем на $t + r^* = a$ Q асимптотически «замораживается» как $Q_0 + Q \exp[-(t - r^*)/2r_g]$ при больших $t - r^*$. Другие соображения об отражении и прохождении мультиполей через «эффективный барьер» даны в ([6]) и ([7]).

ции ([8]) и затем возвратимся к переменной r^* и Q. Тогда для незахватывающегося волнового пакета, падающего на черную дыру из $r^* = +\infty$, получим

$$Q = B(p)\,\Phi^{-1/4}\Big\{i\,(1+e^{-\pi a^2})^{-1/2}\exp\Big(-i\Big[\gamma + \int\limits_{r_2^*}^{r^*}\sqrt{\Phi}\,dr^*\Big]\Big) + $$

$$+ \exp\Big(i\int\limits_{r_2^*}^{r^*}\sqrt{\Phi}\,dr^*\Big)\Big\} \tag{7}$$

$$\text{при } r_2^* < r^* < +\infty;$$

$$Q = B(p)\,\Phi^{-1/4}e^{-i\gamma}\exp\Big[-\int\limits_{r^*}^{r_2^*}\sqrt{\Phi}\,dr^*\Big] \quad \text{при } r^* \in (r_1^*, r_2^*); \tag{8}$$

$$Q = B(p)\,\Phi^{-1/2}(1+e^{\pi a^2})^{-1/2}\exp\Big(i\Big(\gamma + \int\limits_{r^*}^{r_1^*}\sqrt{\Phi}\,dr^*\Big)\Big) \quad \text{при } r^* \in (-\infty, r_1^*). \tag{9}$$

Здесь введены обозначения

$$\Phi = \omega^2 - (l+1)\,l\Big(1-\frac{r_g}{r}\Big)r^{-2}, \quad \gamma = \operatorname{Arg}\Gamma\Big(\frac{1}{2} + i\frac{a^2}{2}\Big) + \frac{a^2}{2} - a^2\ln\frac{a}{2},$$

$$\frac{\pi a^2}{2} = \int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{\sqrt{-\omega^2 + (l+1)\,l\,(1-r_g/r)\,r^{-2}}}{1-r_g/r}\,dr.$$

В (7)—(9) использованы свойства гамма-функции Эйлера и ее асимптотика в комплексной области. r_1 и r_2 действительные корни уравнения $\Phi(r) = 0$.

Подсчитываем теперь поток энергии, идущей к черной дыре за счет рассеяния незахватывающихся волновых пакетов, для случая, когда черная дыра является одной из компонент в двойной системе, в которой менее массивная компонента является источником излучения (для последней принимаем приближение пробного тела). Поток энергии через сферу $r = \text{const}$ равен $\operatorname{Re}\int\frac{\partial Q}{\partial t}\frac{\partial Q}{\partial r^*}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$. Будем отсчитывать угол θ от оси, соединяющей обе звезды. Пусть вблизи источника Q имеет асимптотику $Q = (4\pi)^{-1/2}\sigma\exp[-i\omega f(r, r_0)]\,[f(r, r_0)]^{-1}$, где r_0 — радиальная координата источника, $f(r, r_0)$ — расстояние между r и r_0; σ — интенсивность источника. Тогда функция $B(p)$ в формулах (7)—(9), дающих «импульсное представление» Q, конкретизируется следующим образом. Умножим решение для падающей волны на $2^{1/2}(\pi|\sin\theta|)^{-1/2}\exp[-i\omega p\theta]$ и проинтегрируем по l от $(^{27}/_4)^{1/2}r_g\omega$ до $r_0\omega(1-r_g/r)^{-1/2}$ ($l = (^{27}/_4)^{1/2}\omega r_g$ соответствует траектории, наматывающейся на предельный цикл). Это «координатное представление» для Q упрощаем при помощи метода стационарной фазы:

$$Q = \sqrt{2\omega}\,[\,|\sin\theta|\,\partial\theta/\partial p\,|_{p=\tilde p}\,\Phi^{1/2}]^{-1/2}\,B(\tilde p)\exp\Big[i\Big(\int\limits_{r_2^*}^{r^*}\sqrt{\Phi}\,dr^* - \tilde p\theta\Big)\Big]; \tag{10}$$

здесь $\theta = \int\limits_{x_0}^{x}\tilde p\,(r_g^2 - p^2(x^2 - x^3))\,dx$, $\tilde p \equiv l/\omega$ — прицельный параметр луча; $x \equiv r_g/r$.

Сравнивая (10) с асимптотикой для Q вблизи источника имеем

$$B(p) = \sigma(x_0^2 - x_0^3)\,4^{-1}\pi^{-1/2}(r_g^2 - p^2(x_0^2 - x_0^3))^{-1/4}p^{1/2}\exp\Big[-i\int\limits_{r_2^*}^{r_0^*}\sqrt{\Phi}\,dr^*\Big]. \tag{11}$$

Поэтому для потока энергии рассеянного излучения, прошедшего через барьер кривизны, с помощью (9)—(11), получаем выражение

$$\tilde{I} = -(4r_g)^{-1}\sigma^2 \ln 2 \cdot \omega (x_0^2 - x_0^3)^2 (1 - {}^{27}/_4 (x_0^2 - x_0^3))^{-1/2}; \qquad r_\text{г} \equiv r_0 (1 - r_g/r_0)^{-1/2}. \tag{12}$$

При вычислении $\tilde{I}$ мы учли, что $a^2 \approx ({}^{27}/_4)^{1/2}\omega r_g(p^2/r_g^2 - {}^{27}/_4)$ и воспользовались леммой Ватсона ([8]). В (12) обозначено $\bar{Q} = \text{с.с.}\, Q$.

Для захватывающихся волновых пакетов $m > 0$ и $p < ({}^{27}/_4)^{1/2} r_g$. В этом случае воспользуемся для $D(\xi)$ асимптотическим выражением при $|\xi/\sqrt{m}| \gg 1$:

$$D(\xi) = B(\xi^2 + m)^{-1/4}(e^{-\pi m} + 1)^{-1/2} \exp\left(i\left(\gamma + \int\limits_0^\xi \sqrt{\xi^2 + m}\, d\xi\right)\right) \text{ при } \xi < 0. \tag{13}$$

$$D(\xi) = B(\xi^2 + m)^{-1/4}\left\{i(e^{\pi m} + 1)^{-1/2} \exp\left(i\left(\gamma - \int\limits_0^\xi \sqrt{\xi^2 + m}\, d\xi\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \exp\left(i\int\limits_0^\xi \sqrt{\xi^2 + m}\, d\xi\right) \right. \text{ при } \xi > 0. \tag{14}$$

Здесь $\gamma = \operatorname{Arg}\Gamma(1/2 + im/2) + m/2 - m\ln(\sqrt{m}/2)$.

Без учета рассеяния ($m \to \infty$, $\gamma \to 0$) для потока энергии, захватываемого черной дырой, получаем выражение

$$I = -{}^1/_4 \omega^2\sigma^2 (x_0^2 - x_0^3)(1 - \sqrt{1 - {}^{27}/_4 (x_0^2 - x_0^3)}) \tag{15}$$

(полный поток энергии от источника равен $\omega^2\sigma^2$).

Для потока энергии рассеянной части $\tilde{\tilde{I}}$ захватываемого излучения, уходящего на $r^* = +\infty$, получается выражение, асимптотически равное $|\tilde{I}_1|$. Поэтому в действительности I меньше выражения (15) на величину $\tilde{\tilde{I}}$. Таким образом, черная дыра становится источником вторичного излучения, мощность которого на порядок (по ω) меньше первичного. Угловая зависимость от θ волн вторичного излучения асимптотически определяется фактором $\exp[i\omega\theta r_g({}^{27}/_4)^{1/2}]$. Этот результат может представлять наблюдательный тест для обнаружения черных дыр в двойных системах.

Отметим, что в области максимального приближения к черной дыре $r = r_2$ незахватывающийся волновой пакет частично рассеивается, возбуждая при $r \in (r_1, r_2)$ экспоненциально убывающие стоячие волны (8). После прохождения r_2 амплитуда пакета, двигающегося по геодезической уменьшается в $(1 + \exp(-\pi a^2))^{1/2}$ раз. При $r < r_1$ рассеянная часть (9) волнового пакета, будучи нелокализованной, снова «бежит» к сфере Шварцшильда.

Гравитационные и электромагнитные гармоники $l \gg 1$, излучаемые коллапсирующим телом при $r_\text{гр} < ({}^3/_2) r_g$ (здесь $r_\text{гр}$ — граничный радиус тела), могут доходить до наблюдателя лишь с частотами $\omega r_g \gtrsim ({}^4/_{27})^{1/2} l$: часть спектра излучения с $\omega \ll ({}^4/_{27})^{1/2} l$ доходит до наблюдателя с экспоненциально малой амплитудой. Рассеянная часть волновых гармоник l излучения коллапсирующего тела при $r_\text{гр} < ({}^3/_2) r_g$ до наблюдателя на $r = +\infty$ доходит с асимптотической зависимостью от времени, определяемой фактором $\exp[il({}^4/_{27})^{1/2} t/r_g]$. Это объясняет результаты Пресса ([9]), полученные численным путем.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
21 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. A. Isaacsohn, Phys. Rev., **166**, 1263 (1968). [2] Н. Сибгатуллин, ДАН, **200**, 308 (1972). [3] В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965. [4] T. Regge, J. Wheeler, Phys. Rev., **108**, 1063 (1957). [5] F. G. Zerilli, Phys. Rev. Letters, **24**, 737 (1970). [6] R. Price, Nonspherical Perturbations of Relativistic Gravitational Collaps, Preprint, California, 1971. [7] K. Thorn, Nonspherical Gravitational Collaps. A Short Review, Preprint, California, 1971. [8] Г. Джеффрис, Б. Свирлс, Методы математической физики, **3**, М., 1970. [9] W. H. Press, Astrophys. J., **170**, L-105 (1972).