УДК 512.542

ЦЕПИ В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

В.Н. Тютянов[1], А.А. Трофимук[2]

[1]*Международный университет МИТСО, Гомель*
[2]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

CHAINS IN FINITE GROUPS

V.N. Tyutyanov[1], A.A. Trofimuk[2]

[1]*International University MITSO, Gomel*
[2]*F. Scorina Gomel State University*

Пусть $\mathbb{N}$ и $\mathbb{P}$ – множества всех натуральных и всех простых чисел соответственно. Подгруппа *H* называется $\mathbb{P}^{\infty}$-субнормальной подгруппой группы *G* (*H* $\mathbb{P}^{\infty}$-*sn G*), если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}^{\infty}$ для каждого $i = 1,\ldots,n$. Здесь $\mathbb{P}^{\infty} = \{p^k \mid p \in \mathbb{P}, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$. В настоящей работе перечислены конечные простые неабелевы группы *G* со свойством 1 $\mathbb{P}^{\infty}$-*sn G*.

Ключевые слова*: конечная группа*, *простая неабелева группа*, $\mathbb{P}^{\infty}$ *-субнормальная подгруппа.*

Let $\mathbb{N}$ and $\mathbb{P}$ be the set of all positive integers and all primes, respectively. A subgroup *H* of *G* is called $\mathbb{P}^{\infty}$-subnormal in *G* (*H* $\mathbb{P}^{\infty}$-*sn G*) if there is a chain $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ such that $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}^{\infty}$ for every $i = 1,\ldots,n$, where $\mathbb{P}^{\infty} = \{p^k \mid p \in \mathbb{P}, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$. We obtained finite simple non-abelian groups *G* with 1 $\mathbb{P}^{\infty}$-*sn G*.

Keywords: *finite group*, *simple non-abelian group*, $\mathbb{P}^{\infty}$ *-subnormal subgroup.*

Введение

Будем рассматривать только конечные группы. В работе [1] было введено следующее понятие.

Определение. *Подгруппа H группы G называется* $\mathbb{P}$*-субнормальной в G* (*обозначается H* $\mathbb{P}$*-sn G*), *если либо* $H = G$, *либо существует цепь подгрупп*

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ *– простое число для всех* $i = 1,\ldots,n$.

Имеется достаточно много работ, где изучались конечные группы, у которых каждая подгруппа из заданной системы подгрупп является $\mathbb{P}$-субнормальной в группе. Отметим работу Л.С. Казарина [2, теорема 6], в которой он перечислил простые неабелевы композиционные факторы конечных групп *G*, для которых 1 $\mathbb{P}$-*sn G*. Данный результат был уточнен в [3, теорема 3.2]. В этой работе также были указаны некоторые цепи подгрупп простых индексов для простых неабелевых групп.

В дальнейшем понятие $\mathbb{P}$-субнормальности неоднократно обобщалось в различных направлениях. В работе [4] было введено следующее понятие. Пусть $\mathbb{N}$ и $\mathbb{P}$ – множества всех натуральных и всех простых чисел соответственно. Для фиксированного $t \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathbb{P}^t = \{p^k \mid p \in \mathbb{P}, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}, k \le t\},$$

обозначим

$$\mathbb{P}^{\infty} = \{p^k \mid p \in \mathbb{P}, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}.$$

Подгруппа *H* называется $\mathbb{P}^t(\mathbb{P}^{\infty})$-субнормальной подгруппой группы *G*, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}^t(\mathbb{P}^{\infty})$ для всех $i = 1,\ldots,n$. При этом используется обозначение *H* $\mathbb{P}^t(\mathbb{P}^{\infty})$-*sn G*.

Отметим, что всякая $\mathbb{P}^t$-субнормальная подгруппа будет $\mathbb{P}^{\infty}$-субнормальной. При $t = 1$ получим понятие $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы.

В настоящей работе мы перечислим простые неабелевы группы *G*, в которых 1 $\mathbb{P}^{\infty}$-*sn G*.

Теорема. *Пусть G – простая неабелева группа и* 1 $\mathbb{P}^{\infty}$*-sn G. Тогда* $G \in \{SL_3(3), SL_3(5), PSL_2(7), PSL_2(11), SL_2(2^n)$, *где* $2^n + 1 = p$ *– простое число Ферма*, $SL_2(8), PSL_2(r)$, *где* $r = 2^m - 1$ *– простое число Мерсенна*, $PSU_4(2), PSL_3(8)\}$.

1 Вспомогательные результаты

Используются стандартные обозначения и терминология, которые можно найти, например, в [5], [6]. Нам потребуются следующие вспомогательные результаты.

***Лемма* 1.1** [7, теорема 1]. *Пусть G – простая неабелева группа, $H < G$ и $|G:H| = p^m$, где p – простое число. Тогда имеет место одно из следующих утверждений*:

(a) $G \cong A_n$, $H \cong A_{n-1}$, где $n = p^m$;

(b) $G \cong PSL_r(q)$, H – параболическая подгруппа в G, $|G:H| = \dfrac{q^r-1}{q-1} = p^m$ и r – простое число;

(c) $G \cong PSL_2(11)$, $H \cong A_5$;

(d) $G \cong M_{23}$, $H \cong M_{22}$ или $G \cong M_{11}$, $H \cong M_{10}$;

(e) $G \cong PSU_4(2) \cong PSp_4(3)$, H – параболическая подгруппа индекса 27.

В частности, только группа $PSL_2(7)$ имеет подгруппы различных примарных индексов.

Следующий результат хорошо известен.

***Лемма* 1.2.** *Пусть p и q – простые числа и $1 \le m, n \in \mathbb{N}$ такие, что $p^m = q^n + 1$. Тогда имеет место одно из следующих утверждений*:

(1) $q = 2, p = 3, n = 3, m = 2$;

(2) $q = 2, m = 1$ *и* $p = q^n + 1$ *– простое число Ферма, где n – степень числа* 2;

(3) $p = 2, n = 1$ *и* $q = p^m - 1$ *– простое число Мерсенна*, *где m – простое число.*

***Лемма* 1.3** [3, теорема 3.2]. *Пусть G – простая неабелева группа и 1 $\mathbb{P}$-sn G. Тогда $G \in \{SL_3(3), SL_3(5),$ $PSL_2(7), PSL_2(11), SL_2(2^n)$, где $2^n + 1 = p$ – простое число Ферма.*

***Лемма* 1.4** [4, лемма 4]. *Пусть H – подгруппа группы G, N – нормальная в G подгруппа и $t \in \mathbb{N}$. Тогда справедливо следующее утверждение. Если H $\mathbb{P}^t(\mathbb{P}^\infty)$-$sn$ G, то $(H \cap N)$ $\mathbb{P}^t(\mathbb{P}^\infty)$-$sn$ N и HN/N $\mathbb{P}^t(\mathbb{P}^\infty)$-$sn$ G/N.*

2 Доказательство теоремы

Так как 1 $\mathbb{P}^\infty$-*sn* G, то группа G обладает собственной подгруппой примарного индекса. По лемме 1.1 имеет место один из следующих случаев.

(I) $G \cong A_{p^m}$, где p – простое число и $p^m \ge 5$.

Подгруппы индекса p^m в A_{p^m} это в точности группы A_{p^m-1}. Если A_{p^m-1} разрешима, то $G \cong A_5 \cong SL_2(2^2)$ и по лемме 1.3 1 $\mathbb{P}$-*sn* G, а значит 1 $\mathbb{P}^\infty$-*sn* G. Следовательно, A_{p^m-1} – простая неабелева группа и 1 $\mathbb{P}^\infty$-*sn* A_{p^m-1}. По лемме 1.1 $p^m - 1 = q^n \ge 5$, где q – простое число. Отсюда $p^m = q^n + 1 \ge 6$. По лемме 1.2 имеет место один из следующих случаев.

(1) $q = 2, p = 3, n = 3, m = 2$.

В этом случае $G \cong A_9$. Группа A_9 содержит подгруппу A_8 индекса 3^2, группа A_8 содержит подгруппу A_7 индекса 2^3 в A_8, группа A_7 содержит подгруппу A_6 индекса 7 в A_7. Однако A_6 не имеет собственных подгрупп примарных индексов. Таким образом, в случае (1) 1 не является $\mathbb{P}^\infty$-субнормальной в G.

(2) $q = 2, m = 1$ и $p = 2^{2^l} + 1$ – простое число Ферма.

Отметим, что $l \ge 2$. Группа $A_p = A_{2^{2^l}+1}$ содержит подгруппу $A_{2^{2^l}}$ простого индекса p. Так как $l \ge 2$, то группа $A_{2^{2^l}}$ должна содержать простую неабелеву подгруппу $A_{2^{2^l}-1}$ индекса 2^{2^l} в $A_{2^{2^l}}$ и 1 $\mathbb{P}^\infty$-*sn* $A_{2^{2^l}-1}$. По лемме 1.1 получим, что $2^{2^l} - 1 = q^t$ или $2^{2^l} = q^t + 1$, где q – простое число. Из леммы 1.2 следует, что $t = 1$ и $q = 2^{2^l} - 1$ – простое число Мерсенна. В частности, 2^l – простое число. Так как $l \ge 2$, то это невозможно.

(3) $p = 2, n = 1$ и $q = p^m - 1$ – простое число Мерсенна. В частности, m – простое число.

В этом случае $G \cong A_{2^m}$, $m \ge 3$. В G имеется подгруппа A_{2^m-1} индекса 2^m. Так как $m \ge 3$, то A_{2^m-1} – простая неабелева группа и $A_{2^m-1} = A_q$, где $q \ge 7$. Группа A_q содержит подгруппу A_{q-1} и 1 $\mathbb{P}^\infty$-*sn* A_{q-1}. Поэтому $A_{q-1} = A_{2^l}$, где $2^l \ge 6$. Следовательно, $2^l \ge 8$ и $l \ge 3$. Имеем, что $q = 2^m - 1$ и $q - 1 = 2^l$. Отсюда следует, что $2^m - 2^l = 2$ или $2^l\left(2^{m-l} - 1\right) = 2$. Так как $l \ge 3$, то случай (3) невозможен.

Таким образом, если G – знакопеременная группа и 1 $\mathbb{P}^\infty$-*sn* G, то $G \cong A_5$.

(II) $G \cong PSL_2(11)$.

Из леммы 1.3 следует, что 1 $\mathbb{P}^\infty$-*sn* G.

(III) $G \cong M_{11}$.

Группа M_{11} содержит подгруппу $A_6 \cdot 2$ индекса 11. Следовательно, 1 $\mathbb{P}^\infty$-*sn* $A_6 \cdot 2$. Из пункта 1 леммы 1.1 следует, что это невозможно.

(IV) $G \cong M_{23}$.

Подгруппой индекса 23 в M_{23} является M_{22}. Следовательно, 1 $\mathbb{P}^\infty$-*sn* M_{22}, поэтому M_{22} должна обладать собственной подгруппой примарного индекса, что невозможно по лемме 1.1.

(V) $G \cong PSU_4(2)$.

Группа $PSU_4(2)$ обладает максимальной параболической подгруппой $2^4 : A_5$ индекса 3^3.

По лемме 1.1 $1\ \mathbb{P}$-sn $2^4:A_5$. Таким образом, $1\ \mathbb{P}^{\infty}$-sn $PSU_4(2)$.

(VI) $G \cong PSL_r(q)$, где r – простое число, $q = s^n$ и s – простое число.

Группа $PSL_r(q)$ содержит собственную подгруппу индекса p^m, если $(q^r-1)/(q-1) = p^m$.

Пусть сначала $r=2$ и $G \cong PSL_2(q)$. Рассмотрим два случая.

(1) $G \cong SL_2(2^n)$. По лемме 1.1 $2^n+1=p^m$, где p – нечетное простое число. По лемме 1.2 имеет место одна из следующих возможностей.

(a) $p=3, n=3, m=2$ и $G \cong SL_2(2^3)$. Группа $SL_2(8)$ имеет подгруппу $2^3:7$ индекса 3^2. Поэтому $1\ \mathbb{P}^{\infty}$-sn $SL_2(8)$.

(b) $p = 2^n+1$ – простое число Ферма. По лемме 1.3 $1\ \mathbb{P}$-$sn\ G$.

(2) $G \cong PSL_2(s^n)$, где s – нечетное простое число. По лемме 1.1 $s^n+1=2^m$. Из леммы 1.2 следует, что $n=1$ и $s=2^m-1$ – простое число Мерсенна. Группа $PSL_2(s)$ имеет подгруппу Бореля $s:\left(\frac{s-1}{2}\right)$ индекса 2^m в $PSL_2(s)$. Таким образом, $1\ \mathbb{P}^{\infty}$-$sn\ G$.

Пусть $r=3$. Параболическая подгруппа P группы G имеет разложение Леви $P = O_s(P)LH$, где H – подгруппа Картана, $L \cong A_1(q)$. Если $s=2$, то $G \cong PSL_3(2) \cong PSL_2(7)$ и, очевидно, что $1\ \mathbb{P}^{\infty}$-$sn\ G$. Если $s=3$, то $G \cong SL_3(3)$ и $1\ \mathbb{P}^{\infty}$-sn G. Поэтому будем считать, что $s \notin \{2,3\}$ и подгруппа P содержит единственный простой неабелев композиционный фактор, изоморфный $PSL_2(q)$. Из леммы 1.4 следует, что $1\ \mathbb{P}^{\infty}$-sn $PSL_2(q)$. Следовательно, $PSL_2(q) \in \{PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$, $PSL_2(8)$, $PSL_2(r)$, где $r = 2^m-1$ – простое число Мерсенна, $SL_2(2^n)$, где $2^n+1=p$ – простое число Ферма, $PSL_2(5) \cong SL_2(2^2)\}$.

Каждому простому фактору соответствуют группы: $PSL_3(7)$, $PSL_3(11)$, $PSL_3(8)$, $PSL_3(r)$, где $r=2^m-1$ – простое число Мерсенна, $PSL_3(2^n)$, где $2^n+1=p$ – простое число Ферма, $PSL_3(5)$. Из леммы 1.1 следует, что во всех случаях $(q^3-1)/(q-1) = q^2+q+1$ – степень простого числа. Рассмотрим все варианты.

(a) $G \cong PSL_3(7)$. Тогда $7^2+7+1=57=3\cdot 19$ – не степень простого числа.

(b) $G \cong PSL_3(11)$. Тогда $11^2+11+1=133=7\cdot 19$ – не степень простого числа.

(c) $G \cong PSL_3(8)$. Тогда $8^2+8+1=73$ – простое число. Группа $PSL_3(8)$ содержит параболическую подгруппу $2^6:(7\times PSL_2(8))$ индекса 73. Поэтому $1\ \mathbb{P}^{\infty}$-sn $PSL_3(8)$.

(d) $G \cong PSL_3(r)$, где $r = 2^m-1$ – простое число Мерсенна и r^2+r+1 степень простого числа. Отметим, что m – простое число. Если $m=2$, то $G \cong PSL_3(3)$ и $1\ \mathbb{P}^{\infty}$-$sn\ G$. Поэтому будем считать, что m – нечетное простое число. Имеем

$$r^2+r+1 = (2^m-1)^2+2^m-1+1 = 2^{2m}-2^m+1.$$

Покажем методом математической индукции, что числа вида $2^{2u}-2^u+1$, где u – нечетное число, делятся на 3. Если $u=3$, то $2^{2\cdot 3}-2^3+1 = 3\cdot 19$ делится на 3. Пусть $2^{2u}-2^u+1$ делится на 3. Тогда

$$2^{2(u+2)}-2^{u+2}+1 = 16\cdot 2^{2u}-4\cdot 2^u+1 =$$
$$=16\cdot 2^{2u}-16\cdot 2^u+12\cdot 2^u+16-15 =$$
$$=16(2^{2u}-2^u+1)+12\cdot 2^u-15 =$$
$$=16(2^{2u}-2^u+1)+3(4\cdot 2^u-5)$$

делится на 3.

Следовательно, $2^{2m}-2^m+1=3^k$. Отсюда следует, что $2^m(2^m-1)+1=3^k$ или $2^m\cdot r = 3^k-1$, где $m \ge 3$. Имеет место равенство:

$$3^k-1 = (3-1)(3^{k-1}+3^{k-2}+\cdots+3^1+3^0) =$$
$$=2(3^{k-1}+3^{k-2}+\cdots+3^1+3^0).$$

Если k нечетное число, то $3^{k-1}+3^{k-2}+\cdots+3^1+3^0$ также нечетное число. Так как $m\ge 3$, то это невозможно. Таким образом, $k=2l$. Поэтому

$$2^m\cdot r = (3^l-1)(3^l+1).$$

Очевидно, что $(3^l-1, 3^l+1)=2$. Значит одно из чисел 3^l-1 или 3^l+1 является степенью числа 2.

Пусть $3^l-1=2^f$ или $3^l=2^f+1$. По лемме 1.2 или $f=3, l=2$, или $l=f=1$. В первом случае $2^m\cdot r=(3^2-1)(3^2+1)=2^4\cdot 5$. Так как m – простое число, то это невозможно. Во втором случае $2^m\cdot r=(3-1)(3+1)=2^3$, что невозможно.

Пусть $3^l+1=2^f$. По лемме 1.2 $l=1$. Поэтому $2^m\cdot r=(3-1)(3+1)=2^3$, что невозможно.

(e) $G \cong PSL_3(2^{2^k})$, где $2^{2^k}+1=p$ – простое число Ферма и $2^{2^{k+1}}+2^{2^k}+1$ – степень простого числа. При $k=0$ группа $G \cong PSL_3(2)\cong PSL_2(7)$ и $1\ \mathbb{P}$-$sn\ G$. Поэтому будем считать, что $k\ge 1$.

Покажем методом математической индукции, что $2^{2^{k+1}}+2^{2^k}+1$ делится на 3. При $k=1$ получим $2^{2^2}+2^{2^1}+1=21$ делится на 3. Пусть $2^{2^{k+1}}+2^{2^k}+1$ делится на 3. Имеем

$$2^{2^{k+2}}+2^{2^{k+1}}+1 = 2^{2^{k+2}}+2^{2^{k+1}}+2^{2^k}-2^{2^k}+1=$$
$$=(2^{2^{k+1}}+2^{2^k}+1)+2^{2^{k+2}}-2^{2^k}=$$

$$= (2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1) + (2^{2^k})^4 - 2^{2^k} =$$
$$= (2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1) + 2^{2^k}(2^{2^k} - 1)((2^{2^k})^2 + 2^{2^k} + 1) =$$
$$= (2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1)(1 + 2^{2^k}(2^{2^k} - 1)).$$

Следовательно, по индукции $2^{2^{k+2}} + 2^{2^{k+1}} + 1$ делится на 3.

Таким образом, $2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1 = 3^m$. Отсюда получим, что $2^{2^k}(2^{2^k} + 1) + 1 = 3^m$ или $2^{2^k} \cdot p + 1 = 3^m$. Значит $2^{2^k} \cdot p = 3^m - 1$, где $k \geq 1$ и $p \geq 5$.

Если m – нечетное число, то

$$3^m - 1 = (3-1)(3^{m-1} + 3^{m-2} + \ldots + 3^1 + 3^0) =$$
$$= 2(3^{m-1} + 3^{m-2} + \ldots + 3^1 + 3^0),$$

где $3^{m-1} + 3^{m-2} + \cdots + 3^1 + 3^0$ – нечетное число. Так как $k \geq 1$, то это невозможно. Следовательно, $m = 2l$ и $2^{2^k} \cdot p = (3^l - 1)(3^l + 1)$. Поскольку $(3^l - 1, 3^l + 1) = 2$, то одно из чисел $3^l - 1$ или $3^l + 1$ – степень числа 2.

Пусть $3^l - 1 = 2^f$ или $3^l = 2^f + 1$. По лемме 1.2 или $l = 2$, $f = 3$, или $l = f = 1$. В первом случае $2^{2^k} \cdot p = (3^2 - 1)(3^2 + 1) = 2^{2^2} \cdot 5$. Поэтому $k = 2$ и $G \cong PSL_3(16)$. Однако $16^2 + 16 + 1 = 3 \cdot 7 \cdot 13$ не степень простого числа. Во втором случае $2^{2^k} \cdot p = (3^1 - 1)(3^1 + 1) = 2^3$, что невозможно.

Пусть $3^l + 1 = 2^f$. По лемме 1.2 $l = 1$ и $2^{2^k} \cdot p = (3^1 - 1)(3^1 + 1) = 2^3$, что невозможно.

(f) $G \cong PSL_3(5)$. По лемме 1.3 1 $\mathbb{P}$-*sn* G.

Таким образом, $r \geq 5$. В этом случае параболическая подгруппа P группы G имеет разложение Леви $P = O_s(P)LH$ и подгруппа P содержит единственный простой неабелев композиционный фактор, изоморфный $PSL_{r-1}(q)$. Поскольку $r - 1$ не является простым числом, то случай $r \geq 5$ невозможен. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

2. *Казарин*, *Л.С.* О группах с факторизацией / Л.С. Казарин // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 256, № 1. – С. 26–29.

3. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2 (3). – С. 21–27.

4. *Тютянов*, *В.Н.* Факторизации конечных групп *r*-разрешимыми подгруппами с заданными вложениями / В.Н. Тютянов, В.Н. Князина // Укр. матем. журнал. – 2014. – Т. 66, № 10. – С. 1431–1435.

5. *Gorenstein*, *D.* Finite Groups / D. Gorenstein. – New York: Harper and Row, 1968. – 519 p.

6. *Atlas of finite groups* / J.H. Conway [et. al.]. – Oxford: Clarendon Press, 1985. – 252 p.

7. *Guralnick*, *R.M.* Subgroups of prime power index in a simple group / R.M. Guralnick // J. Algebra. – 1983. – Vol. 81. – P. 304–311.

Поступила в редакцию 04.07.19.