Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 6

УДК 512.25/26+519.3:330.115 *МАТЕМАТИКА*

В. Д. СКАРИН

О МЕТОДЕ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 11 VII 1972)

Статья посвящена установлению связи между исходной задачей математического программирования и задачей со штрафом, при этом основной упор делается на развитие оценочного подхода к данной проблеме. Полученные результаты примыкают в работе (¹).

1. Пусть E — линейное топологическое пространство. Рассмотрим задачу нахождения

$$\min \{f_0(x):\ x \in M \cap C\}, \tag{1,1}$$

где $M = \{x:\ f_j(x) \leqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, q\}$, $f_j(x)$ — определенные на E непрерывные выпуклые функционалы, $j = 0, 1, \ldots, q$, C — телесное выпуклое множество из E. Будем предполагать:

а) задача (1,1) разрешима и $\bar{x}$ — одна из ее оптимальных точек;

б) для (1,1) выполнено следующее условие регулярности (аналог условия C1 из (²)):

$$\exists x^0 \in C^0 \cap M:\ f_j(x^0) < 0 \quad \text{для нелинейных} \quad f_j(x),\quad j = 1, 2, \ldots, q. \tag{1,2}$$

Здесь C^0 — внутренность множества C.

Обозначим через E^* сопряженное к E пространство, через $\partial f_j(y)$ — множество опорных функционалов к $f_j(x)$ в точке y, т. е. $\partial f_j(y) \equiv \{e \in E^*:\ f_j(x) - f_j(y) \geqslant (e, x - y) \quad \forall x \in E\}$, $j = 0, 1, \ldots, q$; через ∂C_y — множество опорных функционалов к C в точке y, т. е. $\partial C_y \equiv \{e \in E^*:\ (e,\ x - y) \leqslant 0\ \ \forall x \in E\}$.

Перечисленных выше условий достаточно (³) для существования таких $\bar{e}_j \in \partial f_j(\bar{x})$, $j = 0, 1, \ldots, q$, $\bar{e} \in \partial C_{\bar{x}}$, и чисел $\lambda_j \leqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, q$, что

$$\bar{e}_0 = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \bar{e}_j - \bar{e}, \quad \lambda_j f_j(\bar{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, q. \tag{1,3}$$

Построим функционал

$$F(x, r) = f_0(x) + \Phi(x, r),$$

где $\Phi(x, r) = \varphi[z(x, r)]$, $z(x, r) = (z_1(x, r), \ldots, z_q(x, r))$, $z_j(x, r) = r_j f_j^+(x)$, $f_j^+(x) = \max\{0, f_j(x)\}$, $r = (r_1, \ldots, r_q) > 0$. Будем считать, что $\varphi(z)$ — выпуклая функция, определенная для неотрицательных точек $z \in R^q$ и удовлетворяющая условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad \inf_{\|z\|=1} \frac{\partial \varphi(0)}{\partial z} = \nu > 0. \tag{1,4}$$

Рассмотрим задачу: найти

$$\inf_{x \in C} F(x, r). \tag{1,5}$$

Теорема 1.1. *В сформулированных выше условиях*

1) *при* $r_j \leqslant \dfrac{\sqrt{q}}{\nu} |\lambda_j|$, $j = 1, \ldots, q$, *задача* (1,5) *разрешима, причем имеет место равенство*

$$\bar{m} = m(r),$$

где $\bar{m}$ *и* $m(r)$ *— оптимальные значения задач* (1,1) *и* (1,5) *соответственно,* λ_j *— из* (1,3), ν *— из* (1,4);

2) *при* $r_j > \frac{\sqrt{q}}{\nu}|\lambda_j|$, $j=1, 2, \ldots, q$, *оптимальные множества задач* (1,1) *и* (1,5) *совпадают.*

Доказательство теоремы основано на использовании соотношений (1,3) и свойств производной по направлению выпуклой функции (см. ([4])).

Заметим, что условиям теоремы 1.1 удовлетворяют, к примеру, такие широко применяемые в методе штрафных функций функционалы, как

$$\Phi_1(x,r) = \sum_{j=1}^{q} r_j f_j^+(x), \qquad \Phi_2(x,r) = \max_{j\in 1,\ldots,q} r_j f_j^+(x).$$

Подчеркнем также существенность условия $r_j \geqslant \frac{\sqrt{q}}{\nu}|\lambda_j|$ для совпадения оптимальных значений задач (1,1) и (1,5).

Предположим, что $\varphi = \varphi(z)$, определенная для $z = (z_1, \ldots, z_q) \geqslant 0$, является равномерно выпуклой функцией от z, т. е. существует такая монотонно возрастающая функция $\delta(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, $\delta(0) = 0$, что справедливо соотношение

$$\varphi\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[\varphi(z_1)+\varphi(z_2)] - \delta(\|z_1 - z_2\|) \tag{1,6}$$

для любых $z_1 \geqslant 0$, $z_2 \geqslant 0$. Пусть, кроме того, $\delta(\tau)$ непрерывна в области определения и

$$\varphi(z) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad z \geqslant 0, \quad \varphi(0) = 0. \tag{1,7}$$

Теорема 1.2. *Если в задаче* (1,5) *функция* $\varphi(z)$ *равномерно выпукла и удовлетворяет* (1,7), *то для произвольного* $0 < \sigma < 1$ *существует такое* $R > 0$, *что задача* (1,5) *разрешима и*

$$\bar{m} - \frac{1}{r_0^{\sigma}}\sqrt{\sum_{j=1}^{q} \lambda_j^2} \leqslant m(r) \leqslant \bar{m}$$

при $r_0 > R$, *где* $r_0 = \min\limits_{j\in 1,\ldots,q} r_j$, λ_j, $j = 1, 2, \ldots, q$, *— из* (1,3).

В качестве постоянной R *можно взять* $\max\left\{1, \left[\delta_{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\sum_{j=1}^{q}\lambda_j^2}\right)\right]^{1/(1-\sigma)}, \frac{1}{h}\sqrt{\sum_{j=1}^{q}\lambda_j^2}\right\}$, *где* $\delta_{-1}(\vartheta)$ *— функция, обратная к* $\vartheta = \delta(\tau)$; $h = \min\limits_{\|z\|=1} \varphi(z) > 0$.

Следствие 1.1. $\lim\limits_{r_0\to\infty} m(r) = \bar{m}$.

Пусть $\varphi(z)$ является сильно выпуклой функцией от z, т. е. в (1,6) $\delta(\tau) = \gamma\tau^2$, $\gamma > 0$.

Теорема 1.3. *Если функция* $\varphi(z)$ *из задачи* (1,5) *сильно выпукла, то для любого* $r > 0$ *задача* (1,5) *разрешима и*

$$\bar{m} - \frac{1}{8\gamma}\sum_{j=1}^{q}\frac{\lambda_j^2}{r_j^2} \leqslant m(r) \leqslant \bar{m},$$

где λ_j, $j = 1, 2, \ldots, q$, *— из* (1,3).

В дальнейшем условие (1,2) не предполагается. Введем в рассмотрение задачу нахождения

$$\min\{f_0(x)\colon f_j(x) \leqslant \varepsilon_j,\ j = 1, 2, \ldots, q,\ x \in C\}, \tag{1,8}$$

$\varepsilon_j > 0$. Предположим, что $M \cap C^0 = \emptyset$ и выполнено следующее условие: если разрешима задача (1,1), то разрешима и задача (1,8) для достаточно малых ε_j, причем

$$m_\varepsilon \to \bar{m} \quad \text{при} \quad \max_j \varepsilon_j \to 0,$$

где m_ε — оптимальное значение задачи (1,8) (условие (*) в ([5])).

Теорема 1.4. *Пусть выполнено условие* (*) *и функция* $\varphi(z)$ *в задаче* (1,5) *удовлетворяет* (1,4).

Тогда задача (1,5) *разрешима, причем*

$$\lim_{\min_j r_j \to \infty} m(r) = \bar{m}.$$

Аналогичное утверждение справедливо и для случая, когда в задаче (1,5) $\varphi(z) = \varphi(z_1, \ldots, z_q)$ — выпуклая функция, определенная и непрерывная на множестве $z \geqslant 0$, такая, что

$$\varphi(0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi(z')}{\partial z_j} > 0 \text{ для тех } j, \text{ для которых } z_j' > 0. \tag{1,9}$$

Заметим, что требованиям (1,9) удовлетворяет штрафная функция

$$\Phi(x, r) = \sum_{j=1}^{q} r_j f_j^{+^k}(x), \quad k > 1.$$

2. Рассмотрим задачу: найти

$$\min \{f_0(x): x \in M\}, \tag{2,1}$$

где M записывается по аналогии с (1,1). Будем полагать, что функционалы $f_j(x)$ определены и слабо полунепрерывны снизу в рефлексивном банаховом пространстве B, $j = 0, 1, \ldots, q$.

Рассматриваемый ниже подход примыкает к ([6], [7]). Пусть $\bar{x}$ — точка локального минимума задачи (2,1), т. е. существует такое число $\delta_0 > 0$, что $\bar{m} = f_0(\bar{x}) \leqslant f_0(x)$ для всех $x \in M \cap S$, где $S = S(\bar{x}, \delta_0) = \{x\colon \|x - \bar{x}\| \leqslant \delta_0\}$. Предположим, что $f_j(\bar{x}) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, t$, $t \leqslant q$.

Наряду с (2,1) введем в рассмотрение задачу нахождения

$$\min_{x \in S} \{F(x, r) = f_0(x) + \Psi(x, r)\}, \tag{2,2}$$

где функционал $\Psi(x, r)$ определен на S ($r = (r_1, \ldots, r_t)$ — вектор-параметр, $r > 0$) и удовлетворяет условиям:

а) $\Psi(x, r)$ слабо полунепрерывен снизу по x при любом r;

б) $\Psi(x, r) \geqslant 0$ для любых x, r;

в) $\lim\limits_{\min r \to \infty} \Psi(x, r) = 0$ для $x \in M$;

г) $\Psi(x, r) \to \infty$ при $\min\limits_j r_j \to \infty$ для $x \in S \setminus M$, не убывая.

Теорема 2.1. *В сформулированных выше условиях*

1) *существует по крайней мере одно решение* x_r *задачи* (2,2);

2) $x^* \in \bar{M}$, *где* x^* — *произвольный слабый предел последовательности* $\{x_r\}$, $\bar{M} = \{x\colon x \in M \cap S, f_0(x) = \bar{m}\}$;

3) $f_0(x_r) \to \bar{m}$ *при* $\min\limits_j r_j \to \infty$;

4) $\Psi(x_r, r) \to 0$ *при* $\min\limits_j r_j \to \infty$.

Теорема 2.1 показывает принципиальную возможность рассмотрения вспомогательных задач минимизации с разрывным штрафным функционалом.

Пусть $f_j(x)$ дифференцируемы по Фреше на S, $j = 0, 1, \ldots, q$. Зафиксируем точку $p \in S$ и от (2,1) перейдем к задаче линейного программирования $L(p)$: найти

$$\min [f_0'(p)(x - p) + f_0(p)]$$

при

$$f_j'(p)(x-p)+f_j(p)\leqslant 0, \quad j=1,2,\ldots,t.$$

Будем говорить, что в точке p выполнено условие (A), если разрешима задача $L(p)$.

При предположении о выполнимости в точке p условия (A) справедливо разложение

$$f_0'(p)=\sum_{j=1}^{t} u_j(p)f_j'(p) \tag{2,3}$$

для некоторых $u_j(p)\leqslant 0$, $j=1,2,\ldots,t$. Оно вытекает из теоремы двойственности для задач линейного программирования.

Рассмотрим задачу: найти

$$\min_{x\in S(\bar{x},\,\delta)} \{F(x,r)=f_0(x)+\Psi(x,r)\}, \tag{2,4}$$

где

$$\Psi(x,r)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\in M\cap S,\\ \delta_0\sum\limits_{j=1}^{t} r_j, & \text{если } x\in S\diagdown M,\end{cases}$$

$$0<\delta\leqslant\delta_0.$$

Очевидно, что задача (2,4) для $\delta\in(0,\delta_0]$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Более того, имеет место

Теорема 2.2. *Пусть функционалы $f_j(x)$, $j=0,1,\ldots,t$, имеют равномерно непрерывные производные Фреше на S и в точке $\bar{x}$ выполнено условие (A).*

Тогда существует такое $\bar{\delta}$, $0<\bar{\delta}\leqslant\delta_0$, что при $r_j\geqslant|u_j(\bar{x})|\,\|f_j'(\bar{x})\|$, $j=1,2,\ldots,t$,

$$\min_{x\in S(\bar{x},\,\bar{\delta})} F(x,r)=\bar{m}.$$

Заметим, что, хотя некоторые из приведенных выше теорем содержат конструктивно непроверяемые условия, тем не менее они дают достаточно четкое представление о качественной стороне связей между исходной задачей и задачей со штрафом.

Институт математики и механики
Уральского научного центра Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
26 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Еремин, ДАН, 173, № 4 (1967). [2] Г. Зойтендейк, Методы возможных направлений, М., 1963. [3] Н. Н. Астафьев, Сборн. Математические методы в некоторых задачах оптимального планирования, в. 3, Свердловск, 1971. [4] Б. Н. Пшеничный, Необходимые условия экстремума, М., 1969. [5] И. И. Еремин, Кибернетика, № 4 (1971). [6] A. V. Fiacco, J. Opt. Theory and Appl., 6, № 3 (1970). [7] M. R. Osborne, D. M. Ryan, J. Math. Anad. and Appl., 31, № 3 (1970).