Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 6

УДК 511 **МАТЕМАТИКА**

П. ТАММЕЛА

К ТЕОРИИ ПРИВЕДЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 26 VI 1972)

1. Область приведения Эрмита — Минковского для $n \leqslant 6$. Пусть $f = \sum a_{ij}x_ix_j$, $i, j = 1, \ldots, n$,— положительно определенная квадратичная форма с вещественными коэффициентами a_{ij}, $a_{ij} = a_{ji}$. Говорят, что форма f приведена по Минковскому, если для любого набора целых чисел $l_1, \ldots, l_n$ из условия о.н.д. $(l_i, \ldots, l_n) = 1$ следует, что

$$f(l_1, \ldots, l_n) \geqslant a_{ii}. \tag{1}$$

В $N = \frac{1}{2}n(n+1)$-мерном пространстве коэффициентов $\{a_{11}, \ldots, a_{nn}, a_{12}, \ldots, a_{n-1,n}\}$ область приведения Минковского есть выпуклый гоноэдр с конечным числом граней ([1-3]). Минковский ([5-7]) сформулировал ряд утверждений, позволяющих вычислять гоноэдр приведения для $n \leqslant 6$. Однако доказательство этих предложений было опубликовано им лишь для $n \leqslant 4$ ([1, 5]). Случай $n = 5$ был недавно доказан С. С. Рышковым ([8]). Мы доказываем утверждение Минковского в полном объеме.

Теорема 1. *Пусть $n \leqslant 6$. Для того чтобы форма f была приведена по Минковскому, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям*

$$a_{ii} \leqslant a_{i+1,\,i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

и условиям

$$f(l_1, \ldots, l_n) \geqslant a_{kk}, \tag{3}$$

где $k = 1, \ldots, n$, а значения l_i берутся из табл. 1.

Таблица 1

l_k	$\pm l_{k\mathrm{I}}$	$\pm l_{k\mathrm{II}}$	$\pm l_{k\mathrm{III}}$	$\pm l_{k\mathrm{IV}}$	$\pm l_{k\mathrm{V}}$
1	1				
1	1	1			
1	1	1	1		
1	1	1	1	1	
1	1	1	1	2	
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	2	2
1	1	1	1	2	3

Здесь $(k, \ldots, k^{(n-1)})$ пробегают все перестановки индексов $(1, \ldots, n)$. При этом из таблицы берутся лишь строки, не превосходящие по длине n, причем пустые места заполняются нулями.

Доказательство. Достаточно доказать, что из неравенств (2) и (3) следуют все неравенства (1). Не нарушая общности, можно считать, что $l_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, ибо иначе форму f можно заменить на форму $f_1 = f(\pm x_1, \ldots, \pm x_n)$, где знаки выбраны так, чтобы $f_1(|l_1|, \ldots, |l_n|) = f(l_1, \ldots, l_n)$. Теорема доказывается при помощи следующего предложения.

Лемма 1. *Пусть $n \leqslant 6$. Пусть f удовлетворяет условиям* (3). *Пусть целый вектор $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $l_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, отличен от векторов табл.* 1.

Тогда существует целый вектор $l' = (l_1', \ldots, l_n')$ с условиями: 1) $0 \leqslant l_i' \leqslant l_i$, $i = 1, \ldots, n$; 2) $l_i' > 0$, *если* $l_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$; 3) $l_1' + \ldots + l_n' < l_1 + \ldots + l_n$; 4) $f(l') \leqslant f(l)$.

Доказательство. Не нарушая общности, мы предполагаем, что для $l = (l_1, \ldots, l_n)$ выполняются условия $l_1 \leqslant l_2 \leqslant \ldots \leqslant l_n$. Ибо иначе мы можем форму f заменить на форму $f' = f(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n})$ так, чтобы $l_{k_1} \leqslant \ldots \ldots \leqslant l_{k_n}$. Доказав же лемму 1 для формы f', мы ее докажем тем самым и для формы f.

Обозначим через e_i вектор, у которого i-я координата равна 1, а все остальные равны 0, $i = 1, \ldots, n$; если $i, j, \ldots, k$ суть индексы (возможно, совпадающие) из набора $\{1, \ldots, n\}$, то полагаем $e_{i,j,\ldots,k} = e_i + e_j + \ldots + e_k$. Вектор l' строится одним из следующих способов:

1) если $l_{n-k} > 1$ и $2l_{n-k} > \sum_{i=1}^{n-k-1} l_i$ при $k = 0, 1, 2$, то $l' = l - e_{n-k,\ldots,n}$;

2) если $l_{n-3} > 1, 2l_{n-3} > \sum_{i=1}^{n-4} l_i$ и $l_{n-3} + l_{n-2} + l_{n-1} > \sum_{i=1}^{n-4} l_i + l_n$, то $l' = l - e_{n-3,n-2,n-1,n}$;

3) если $l_{n-3} > 1$, $2l_{n-3} > \sum_{i=1}^{n-4} l_i$ и $l_{n-3} + l_n - l_{n-1} > \sum_{i=1}^{n-4} l_i$, то $l' = l - e_{n-3,n-2,n-1,n,n}$;

4) если $l_{n-4} > 1, 2l_{n-4} > \sum_{i=1}^{n-5} l_i, l_{n-4} + l_n - l_{n-1} > \sum_{i=1}^{n-5} l_i$ и $l_{n-4} + l_{n-3} + l_{n-2} > \sum_{i=1}^{n-5} l_i + l_{n-1}$, то $l' = l - e_{n-4,n-3,n-2,n-1,n,n}$;

5) если $l_1 > 1$, $l_1 + l_5 + l_6 > l_2 + l_3 + l_4$ и $l_1 + l_2 + l_3 + l_5 > l_4 + l_6$, то $l' = l - e_{1,2,3,4,5,5,6,6}$.

Лемма доказана.

Можно показать, что все условия теоремы 1, определяемые последне строкой табл. 1, кроме $f(3, \alpha_2, \ldots, \alpha_6) \geqslant a_{kk}$, где $k = 6$, если $|\alpha_6| = 1$ $k = 5$, если $|\alpha_6| = 2$, являются следствиями других неравенств.

2. Ненормальность разбиения конуса положител ности на точные области приведения Эрмита—Ми ковского. Точная область выделяется из области приведения Минко ского неравенствами $a_{i,i+1} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Теорема 2. *Для $n \geqslant 3$ разбиение конуса положительности квадрати ных форм на области, эквивалентные точной области приведения Минко ского, не является нормальным.*

В частности, по грани $a_{11} = a_{22}$ с исходной точной областью соприкас ются две области, получаемые из нее преобразованиями

$$S_1 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix},$$

где I_{n-2} — единичные матрицы размера $(n-2) \times (n-2)$.

Таким образом, точная область приведения Минковского не являет областью Венкова V_φ ([4]) для $n \geqslant 3$ ни для одной положительной квад тичной формы φ.

3. Эквивалентность приведенных форм. Говорят, ч форма f приведена по Эрмиту ([6]), если при $\delta \to +\infty$ функция $h(f, \delta)$

$= a_{11}\delta^{n-1} + a_{22}\delta^{n-2} + \ldots + a_{nn}$ наименьшая среди функций, определенных таким же образом среди всех форм, эквивалентных форме f. Из результатов Рышкова ([8]) и теоремы 1 следует, что для $n \leqslant 6$ область приведения Эрмита совпадает с областью приведения Минковского. Отсюда выводится следующее предложение.

Лемма 2. *Пусть f — норма от $n \leqslant 6$ переменных — приведена по Минковскому. Для того чтобы целочисленная унимодулярная матрица S преобразовала f в форму, приведенную по Минковскому, необходимо и достаточно, чтобы для любого i*

$$f(s_{i1}, \ldots, s_{in}) = a_{ii}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Лемма 3. *Пусть f — форма от $n \leqslant 6$ переменных — приведена по Минковскому.*

Тогда совокупность решений уравнения

$$f(l_1, \ldots, l_n) = a_{kk}, \tag{4}$$

для которых $l_k \neq 0$, либо: 1) содержится в табл. 2, где индексы $(i, \ldots, i^{(n-1)})$ пробегают все возможные перестановки от $(1, \ldots, n)$; при этом из табл. 2 берутся лишь строки по длине n, а пустые места заполняются нулями; либо 2) только в случае $k = 6$ имеют вид $(l_1\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, 2\varepsilon_6)$, где целое число $l_1 \geqslant 4$, а $\varepsilon_i = \pm 1$.

Таблица 2

$\pm l_i$	$\pm l_{i^{\mathrm{I}}}$	$\pm l_{i^{\mathrm{II}}}$	$\pm l_{i^{\mathrm{III}}}$	$\pm l_{i^{\mathrm{IV}}}$	$\pm l_{i^{\mathrm{V}}}$
1					
1	1				
1	1	1			
1	1	1	1		
1	1	1	2		
1	1	1	1	1	
1	1	1	1	2	
1	1	1	2	2	
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	3
1	1	1	1	2	2
1	1	1	1	2	3
1	1	1	2	2	2
1	1	1	2	2	3
1	1	1	2	2	4
1	1	2	2	2	3

Эта лемма доказывается аналогично теореме 1.

Пусть f — форма от $n \leqslant 6$ переменных приведена по Минковскому. Пусть $m_k(f)$ — совокупность решений (4) в целых $l = (l_1, \ldots, l_n)$, взятых из табл. 2. Тогда из леммы 2 выводится следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть f — форма от $n \leqslant 6$ переменных, приведенная по Минковскому. Для того чтобы целочисленная унимодулярная матрица $S = (s_{ij})$ преобразовала форму f в форму, приведенную по Минковскому, необходимо и достаточно, чтобы для всех k*

$$(s_{k1}, \ldots, s_{kn}) \in m_k(f).$$

На основании теоремы 3 строится следующий алгорифм нахождения всех целочисленных унимодулярных матриц S, переводящих заданную форму f от $n \leqslant 6$ переменных, приведенную по Минковскому, в приведенную же форму. Находят все множества $m_k(f)$ и составляют все такие целочисленные унимодулярные матрицы $S^{(\sigma)} = (s_{ij}^{(\sigma)})$, что

$$(s_{k1}^{(\sigma)}, \ldots, s_{kn}^{(\sigma)}) \in m_k(f).$$

При помощи таких матриц можно строить и общий алгорифм приведения положительных квадратичных форм, аналогичный алгорифму, описанному в статье [8].

4. Область Дирихле для положительно определенной квадратичной формы для $n \leqslant 6$. Пусть f — положительно определенная квадратичная форма. Пусть $D(f)$ — область Дирихле квадратичной формы f, т. е. множество точек x с условием: $f(x) \leqslant f(x-l)$ для всех целых векторов $l = (l_1, \ldots, l_n)$.

Теорема 4. *Пусть форма f приведена по Минковскому ($n \leqslant 6$). Тогда в определении области Дирихле $D(f)$ можно ограничиться лишь теми неравенствами, в которых точки $l = (l_1, \ldots, l_n)$ берутся из табл. 2 и табл.* 3.

Таблица 3

$\pm l_i$	$\pm l_{i\mathrm{I}}$	$\pm l_{i\mathrm{II}}$	$\pm l_{i\mathrm{III}}$	$\pm l_{i\mathrm{IV}}$	$\pm l_{i\mathrm{V}}$
1	1	1	2	3	
1	1	1	2	3	3
1	1	1	2	3	4
1	1	2	2	3	4
1	2	2	2	3	3

где индексы $(i, \ldots, i^{n-1})$ пробегают все возможные перестановки от $(1, \ldots, n)$; при этом из табл. 3 берутся лишь строки по длине n, причем пустые места заполняются нулями.

Эта теорема доказывается аналогично теореме 1.

Почти все результаты пп. 1—4 верны в случае $n \leqslant 6$ и для области приведения Венкова V_φ [4], где $\varphi = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Эта область определяется условиями [3] теоремы 1.

Приношу благодарность А. В. Малышеву за постановку задачи и внимание к работе.

Автор посвящает эту заметку памяти акад. Ю. В. Линника.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
6 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Minkowski, Ges. Abh., 2, Leipzig — Berlin, 1911, S. 53. [2] Б. Н. Делоне, УМН, в. 3, 16 (1937). [3] B. L. van der Waerden, Acta math., 96, № 3—4, 265 (1956). [4] Б. А. Венков, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, № 1, 37 (1940). [5] H. Minkowski, Ges. Abh., 1, Leipzig — Berlin, 1911, S. 145. [6] H. Minkowski, ibid., S. 153. [7] H. Minkowski, ibid., S. 217. [8] С. С. Рышков, ДАН, 198, № 5, 1028 (1971).