Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 4

УДК 513.838 *МАТЕМАТИКА*

В. В. ГОЛЬДБЕРГ

О $(n+1)$-ТКАНЯХ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 VIII 1972)

1. Пусть через каждую точку M открытой области D дифференцируемого многообразия X_{nr} проходит одна и только одна поверхность каждого из $n+1$ семейств S_ξ $(n-1)r$-мерных поверхностей V_ξ, $\xi=0, 1, \ldots, n$, причем в пределах области D поверхности одного семейства не пересекаются, а поверхности n разных семейств имеют не более одной общей точки. В таком случае будем говорить, что семейства S_ξ образуют в области D $(n+1)$-ткань $\mathfrak{M}$. Случай $n=2$ изучался в работах [1, 2]; $n=2$, $r=2$ – в [3]; $r=1$, $n>2$ – в [4–7]; $r=1$, $n=2, 3$ – в [8].

В настоящей работе впервые строится локальная теория $(n+1)$-тканей $(n-1)r$-поверхностей на многообразии X_{nr} для любых r и $n>2$.

2. Семейства S_ξ поверхностей V_ξ определим вполне интегрируемыми системами пфаффовых уравнений $\underset{\xi}{\omega}^i=0$, $\xi=0, 1, \ldots, n$; $i=1, \ldots, r$.

Условия полной интегрируемости каждой из этих систем запишем в виде

$$d\underset{\xi}{\omega}^i=\underset{\xi}{\omega}^j\wedge\underset{\xi}{\omega}_j^i. \tag{1}$$

Форм $\underset{\xi}{\omega}^i$ всего $(n+1)r$; независимых среди них на X_{nr} должно быть nr. Поэтому формы $\underset{\xi}{\omega}^i$ связаны r зависимостями, которые можно привести к виду

$$\sum_\xi \underset{\xi}{\omega}^i=0. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем

$$d\underset{\alpha}{\omega}^i=\underset{\alpha}{\omega}^j\wedge\omega_j^i+\sum_{\beta\neq\alpha}\underset{\alpha\beta}{a}{}_{jk}^i\underset{\alpha}{\omega}^j\wedge\underset{\beta}{\omega}^k, \quad \alpha,\beta=1, \ldots, n, \tag{3}$$

причем $\omega_j^i=\underset{0}{\omega}_j^i$, $\underset{\alpha\beta}{a}{}_{jk}^i=\underset{\beta\alpha}{a}{}_{kj}^i$.

За счет преобразования форм ω_j^i можно добиться того, что

$$\sum_{\alpha,\beta}\underset{\alpha\beta}{a}{}_{jk}^i=0. \tag{4}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (3) и разрешение полученных кубичных уравнений с учетом (4) дает

$$\nabla\underset{\alpha\beta}{a}{}_{jk}^i\equiv d\underset{\alpha\beta}{a}{}_{jk}^i-\underset{\alpha\beta}{a}{}_{lk}^i\omega_j^l-\underset{\alpha\beta}{a}{}_{jl}^i\omega_k^l+\underset{\alpha\beta}{a}{}_{jk}^l\omega_l^i=$$
$$=\sum_\gamma\left(\underset{\alpha\beta\gamma}{a}{}_{jkl}^i+\underset{\alpha\beta}{a}{}_{mk}^i\underset{\gamma\alpha}{a}{}_{lj}^m+\underset{\alpha\beta}{a}{}_{jm}^i\underset{\beta\gamma}{a}{}_{kl}^m\right)\underset{\gamma}{\omega}^l, \tag{5}$$

$$d\omega_j^i-\omega_j^k\wedge\omega_k^i=\sum_\alpha\underset{\alpha}{a}{}_{jkl}^i\underset{\alpha}{\omega}^k\wedge\underset{\alpha}{\omega}^l+\sum_{(\alpha,\beta)}\underset{\alpha\beta}{a}{}_{jkl}^i\underset{\alpha}{\omega}^k\wedge\underset{\beta}{\omega}^l, \tag{6}$$

причем

$$\underset{\alpha}{a}{}^{i}_{jkl}=\underset{\gamma\alpha\alpha}{a}{}^{i}_{j[kl]},\quad \underset{\alpha\beta}{a}{}^{i}_{jkl}=\underset{\gamma\alpha\beta}{a}{}^{i}_{jkl}-\underset{\beta\gamma\alpha}{a}{}^{i}_{ljk},\quad \underset{\alpha}{a}{}^{i}_{[jkl]}=0,\ \underset{\alpha\beta}{a}{}^{i}_{[jk]l}+\underset{\alpha}{a}{}^{i}_{ljk}=0.$$

3. Установим геометрический смысл форм ω_j^i. Для точки $M\in X_{nr}$

$$dM=\sum_{\alpha}\underset{\alpha}{\omega}{}^{i}\mathbf{e}_{\alpha i}. \tag{7}$$

Если уравнение (7) продифференцировать внешним образом, развернуть полученные квадратичные уравнения по линейно независимым формам $\underset{\alpha}{\omega}{}^{i}$ и положить в полученных уравнениях $\underset{\alpha}{\omega}{}^{i}=0$, то будем иметь $\delta\mathbf{e}_{\alpha j}=\omega_j^i(\delta)\mathbf{e}_{\alpha i}$. Это значит, что формы ω_j^i при фиксированной точке M определяют согласованные инфинитезимальные перемещения n групп векторов $\mathbf{e}_{\alpha j}$ касательного пространства T_{nr} многообразия X_{nr}.

4. Уравнения (5) показывают, что совокупность величин $\{\underset{\alpha\beta}{a}{}_{jk}^{i}\}$ при любых α, β образует тензор. Из уравнений (3) и (6) вытекает, что на многообразии X_{nr} формы

$$\omega^I=\{\underset{1}{\omega}{}^{i},\ldots,\underset{n}{\omega}{}^{i}\},\quad \omega_J^I=\begin{pmatrix}\omega_j^i & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \omega_j^i & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & \omega_j^i\end{pmatrix},\quad I,J=1,\ldots,nr,$$

определяют аффинную связность [9], тензоры кручения и кривизны которой строятся с помощью величин $\underset{\alpha\beta}{a}{}^{i}_{jk}$ и $\underset{\alpha\beta\gamma}{a}{}^{i}_{jkl}$. Будем называть тензоры $\underset{\alpha\beta}{a}{}^{i}_{jk}$ и $\underset{\alpha\beta}{a}{}^{i}_{jkl}$ **тензорами кручения и кривизны** $(n+1)$**-тканей**.

Из (5) и (6) видно, что при $n>2$ тензор кривизны $\mathfrak{M}$ выражается через пфаффовы производные тензора кручения $\underset{\alpha\beta}{a}{}_{jk}^{i}$ и сам этот тензор, что отличает случай $n>2$ от случая $n=2$.

Поверхности V_ξ обладают, вообще говоря, отличными от нуля кручением и кривизной, причем тензоры кручения и кривизны V_ξ являются подтензорами тензоров кручения и кривизны всей $(n+1)$-ткани $\mathfrak{M}$.

Уравнения геодезических линий на X_{nr} распадаются на n групп: $d\underset{\alpha}{\omega}{}^{i}+\underset{\alpha}{\omega}{}^{j}\omega_j^i=\varphi\underset{\alpha}{\omega}{}^{i}$. Они показывают, что каждая из поверхностей V_ξ является вполне геодезической поверхностью на X_{nr}.

5. Укажем геометрический смысл обращения в нуль и равенства между собой подтензоров тензора кручения $(n+1)$-ткани $\mathfrak{M}$.

1°) Ткань $\mathfrak{M}$ назовем **параллелизуемой**, если ее можно отобразить на $n+1$ семейств параллельных $(n-1)r$-плоскостей аффинного пространства A_{nr}. Необходимое и достаточное условие параллелизуемости $\mathfrak{M}$ — обращение в нуль ее тензора кручения: $\underset{\alpha\beta}{a}{}_{jk}^{i}=0$.

Параллелизуемость $\mathfrak{M}$ влечет параллелизуемость любой ее $(k+1)$-подткани $(k<n)$, высекаемой на пересечении каких-нибудь $n-k$ поверхностей ткани остальными $k+1$ ее поверхностями. Если три (из $n+1$) n-подтканей $\mathfrak{M}$ параллелизуемы, то и вся $(n+1)$-ткань $\mathfrak{M}$ параллелизуема. Более общее утверждение: *любые $n-k+2$ поверхности ткани дают C^2_{n-k+2} $(k+1)$-подтканей; если все эти $(k+1)$-подткани параллелизуемы, то и вся $(n+1)$-ткань $\mathfrak{M}$ параллелизуема.*

2°) Каждое из равенств $\underset{\alpha\beta}{a}{}^{i}_{[jk]}=0$ или $\underset{\alpha\beta}{a}{}^{i}_{[jk]}+\underset{\beta\gamma}{a}{}^{i}_{[jk]}+\underset{\gamma\alpha}{a}{}^{i}_{[jk]}=0$ необходимо и достаточно для того, чтобы три-ткань $[\alpha,\beta,0]$ $(\underset{\gamma}{\omega}{}^{i}=0,\ \gamma\neq\alpha,\beta)$ или $[\alpha,\beta,\gamma]$ $(\underset{0}{\omega}{}^{i}=\underset{\delta}{\omega}{}^{i}=0,\ \delta\neq\alpha,\beta,\gamma)$ была паратактической (так в [2]) названа три-ткань с нулевым тензором кручения). В частности, при $r=1$ любая из C^2_{n+1} таких три-тканей будет паратактической. Далее отсюда вытекает, что для 4-ткани $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ $(\underset{\delta}{\omega^i}=0,\ \delta\neq\alpha, \beta, \gamma)$ паратактичность любых трех ее три-тканей влечет паратактичность четвертой.

3°) 4-ткань $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ имеет три диагональных распределения $(2r)$-плоскостей $\underset{0}{\omega^i}+\underset{\varepsilon}{\omega^i}=0$, $\varepsilon=\alpha, \beta, \gamma$. Условием голономности такого распределения является выполнение равенств

$$\underset{\varepsilon\lambda}{a^i_{jk}}=\underset{\varepsilon\mu}{a^i_{jk}}, \quad \varepsilon, \lambda, \mu=\alpha, \beta, \gamma, \quad \varepsilon\neq\lambda\neq\mu. \tag{8}$$

В случае, если на 4-ткани $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ все три диагональные распределения голономны, то $\underset{\alpha\beta}{a_{jk}{}^i}=\underset{\beta\gamma}{a_{jk}{}^i}=\underset{\gamma\alpha}{a_{jk}{}^i}=0$, т. е. 4-ткань параллелизуема. Голономность двух диагональных распределений и паратактичность любой из 4 три-тканей 4-ткани $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ влечет голономность третьего диагонального распределения. Голономность всех диагональных распределений на каждой из $C_n{}^3$ 4-тканей $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ — необходимое и достаточное условие параллелизуемости $\mathfrak{M}$. Условие голономности диагонального распределения $\underset{\lambda}{\omega^i}+\underset{\mu}{\omega^i}=0$ 4-ткани $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$, $\lambda, \mu=\alpha, \beta, \gamma, \delta$, $\lambda\neq\mu$, имеет вид

$$\underset{\mu\nu}{a^i_{jk}}-\underset{\mu\sigma}{a^i_{jk}}=\underset{\lambda\nu}{a^i_{jk}}-\underset{\lambda\sigma}{a^i_{jk}}, \quad \lambda\neq\mu\neq\nu\neq\sigma.$$

4°) Система $\underset{0}{\omega^i}+\sum\limits_{s=1}^{h}\underset{\alpha_s}{\omega^i}=0$, $h<n$, определяет диагональное распределение $(n-1)r$-плоскостей, определяемых векторами $\mathbf{e}_{\alpha_s i}$ и $\mathbf{e}_{\gamma_t i}-\mathbf{e}_{\delta_t i}$, $t\neq s$, $\gamma_t\neq\delta_t$, δ_t фиксировано. Условия голономности такого распределения (будем обозначать его $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_h\}$) суть

$$\underset{\alpha_s\gamma_t}{a^i_{jk}}=\underset{\alpha_s\delta_t}{a^i_{jk}}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) вытекает, что голономность диагонального распределения $\underset{t}{\omega^i}+\underset{\alpha}{\omega^i}=0$ (α фиксировано) необходимо и достаточно для голономности одного из диагональных распределений любой из C^2_{n-1} 4-тканей $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$. Очевидно, что голономность распределения $\{\alpha, \ldots, \alpha_h\}$ влечет голономность распределения $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_h\}$ на $(n-k+1)$-подткани $\underset{\gamma t}{\omega^i}=0$, $t=h+1, \ldots, h+k(\leqslant n)$. Если распределения $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$ голономны и три-ткань $[\alpha, \beta, 0]$ паратактична, то распределение $\underset{\alpha}{\omega^i}+\underset{\beta}{\omega^i}=0$ тоже голономно. Если распределения $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$ голономны, то распределение $\underset{\alpha}{\omega^i}+\underset{\beta}{\omega^i}+\underset{\gamma}{\omega^i}=0$ голономно, любая 4-ткань $[\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon]$ параллелизуема. Если распределения $\{\alpha_1\}, \ldots, \{\alpha_h\}$, $2<h<n$, голономны, то распределение $\sum\limits_{s=1}^{n}\underset{\alpha_s}{\omega^i}=0$ также голономно.

Если $n-1$ распределений $\{\hat{\alpha}\}$, $\hat{\alpha}\neq\alpha$, голономны, то $(n+1)$-ткань $\mathfrak{M}$ параллелизуема.

6. Будем называть $(n+1)$-ткань $\mathfrak{M}$ **шестиугольной**, если шестиугольны все ее C^3_{n+1} три-тканей $[\xi, \eta, \zeta]$. Тензоры кривизны (см. [2]) $\underset{\alpha\beta\gamma}{b^i_{jkl}}, \underset{\alpha\beta0}{b^i_{jkl}}, \underset{\beta\gamma0}{b^i_{jkl}}, \underset{\gamma\alpha0}{b^i_{jkl}}$ три-тканей $[\alpha, \beta, \gamma]$, $[\alpha, \beta, 0]$, $[\beta, \gamma, 0]$, $[\gamma, \alpha, 0]$ удовлетворяют равенству

$$\underset{\alpha\beta\gamma}{b^i_{(jkl)}}=\underset{\alpha\beta0}{b^i_{(jkl)}}+\underset{\beta\gamma0}{b^i_{(jkl)}}+\underset{\gamma\alpha0}{b^i_{(jkl)}}. \tag{10}$$

Из равенства (10) вытекает обобщенная теорема Дюбурдье ([8]): если C_n^2 три-тканей $[\xi, \eta, \zeta]$, где ζ фиксировано, шестиугольны, то и остальные C_n^3 три-тканей $[\xi, \eta, \varphi]$, $\varphi \neq \zeta$, а значит, и $(n+1)$-ткань $\mathfrak{M}$, будут шестиугольными.

7. Из (7) вытекает, что векторы $\mathbf{e}_{\alpha i}$ касаются r-поверхности $\bigcap\limits_{\hat\alpha \neq \alpha} V_{\hat\alpha}$. На таких r-поверхностях будем считать соответствующими линии, касающиеся векторов с одинаковыми координатами. Эти линии высекаются на этих r-поверхностях поверхностями $\underset{0}{\omega^i} = 0$. Они определяются уравнениями $\underset{\hat\alpha}{\omega^i} = 0$, $\underset{\alpha}{\omega^i} = \xi^i\, dt$, а касательные векторы к ним $\xi_\alpha = \xi^i \mathbf{e}_{\alpha i}$. Если одна из этих линий геодезическая, то геодезическими будут и остальные $n-1$ линий. n-Вектор $[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ назовем *трансверсально-геодезическим*. Рассмотрим n-поверхность V, огибающую трансверсально-геодезические n-векторы $[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. Ее уравнения $\underset{\alpha}{\omega^i} = \xi^i \theta_\alpha$. Поверхности V_ξ высекают на V $(n+1)$-ткань из $(n-1)$-мерных поверхностей. Для нее имеем

$$d\theta_\alpha = \theta_\alpha \wedge \theta + \sum_{\beta \neq \alpha} \underset{\alpha\beta}{a}\, \theta_\alpha \wedge \theta_\beta, \qquad \sum_{(\alpha,\beta)} \underset{\alpha\beta}{a} = 0.$$

Условия интегрируемости для V дадут

$$d\xi^i + \xi^j \omega_j^i = \theta \xi^i, \tag{11}$$

$$\underset{\alpha\beta}{a^i_{jk}} \xi^j \xi^k = \underset{\alpha\beta}{a}\, \xi^i. \tag{12}$$

Равенства (11) означают, что как сама n-поверхность V, так и пересечение ее с поверхностями V_ξ будут вполне геодезическими поверхностями. Такую поверхность V назовем *трансверсально-геодезической*. Равенства (12) означают, что векторы ξ_α будут собственными для тензора кручения $\underset{\alpha\beta}{a_{jk}^i}$ (то же будет для его ковариантных производных).

Ткань $\mathfrak{M}$ назовем *трансверсально-геодезической*, если любые n соответствующих направлений ее, выходящие из точки $M \in X_{nr}$, определяют трансверсально-геодезическую n-поверхность V. Условия трансверсальной геодезичности $\mathfrak{M}$ имеют вид

$$\underset{\alpha\beta}{a^i_{(jk)}} = \delta^i_{(j} \underset{\alpha\beta}{a_{k)}}, \tag{13}$$

где $\underset{\alpha\beta}{a_k} = \dfrac{2}{r+1} \underset{\alpha\beta}{a^i_{(ik)}}$. Из (13) легко получить, что равенства $\underset{\alpha\beta}{a^i_{(jk)}} = 0$ необходимы и достаточны для трансверсальной геодезичности $\mathfrak{M}$ и параллелизуемости всех $(n+1)$-тканей, высекаемых поверхностями V_ξ ткани $\mathfrak{M}$ на трансверсально-геодезических n-поверхностях V. Таким образом, параллелизуемость $(n+1)$-тканей на всех трансверсально-геодезических n-поверхностях V трансверсально-геодезической $(n+1)$-ткани $\mathfrak{M}$ не влечет параллелизуемости $\mathfrak{M}$. Последняя получится, если дополнительно потребовать паратактичности всех три-тканей $[\alpha, \beta, 0]$.

Аналогично можно доказать, что для того, чтобы трансверсально-геодезическая $(n+1)$-ткань $\mathfrak{M}$ была шестиугольной, необходимо и достаточно, чтобы для нее все n-мерные $(n+1)$-ткани, принадлежащие ее трансверсально-геодезическим n-поверхностям V, были шестиугольными.

Московский институт стали
и сплавов

Поступило
22 VIII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Chern Shiing-Shen, Abh. Hamburg. math. Sem., **11** (1936). [2] М. А. Акивис, Тр. геом. сем. ВИНИТИ АН СССР, **2** (1969). [3] G. Bol, Math. Ann., **110** (1935). [4] H. Bartsch, Abh. Hamburg. math. Sem., **17** (1951). [5] H. Bartsch, Ann. Mat., **4**, Fasc. 32 (1951). [6] H. Aue, Mitteil. Math. Gesel. Hamburg, **7** (1938). [7] M. Jeger, Comment. Math. Helvetici, **24** (1950). [8] В. Бляшке, Введение в геометрию тканей, М., 1959. [9] Г. Ф. Лаптев, Тр. Московск. матем. общ., **2** (1953).