Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 1

УДК 539.3:517.43 *ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

В. М. АЛЕКСАНДРОВ

О РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ПАРНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 11 VII 1972)

Смешанные задачи теории упругости и математической физики, как правило, сводятся к исследованию либо парных интегральных уравнений, либо парных рядов — уравнений. В данной заметке изложен метод сведения широкого класса парных уравнений, часто встречаемых при изучении конкретных смешанных задач, к бесконечным алгебраическим системам. Метод может быть использован при решении смешанных задач для неограниченных областей (полоса, слой, цилиндр, клин и т. д.) и для областей конечных размеров, очерченных плоскими, цилиндрическими и сферическими поверхностями (прямоугольная область, круглая плита, цилиндр конечной длины, шар и т. д.). Метод базируется на ранее развитом в работах В. А. Бабешко (1) и автора (2) асимптотическом методе «малых λ». В качестве примера рассмотрены парные интегральные уравнения, порождаемые преобразованием Ханкеля.

1. Пусть дано интегральное преобразование

$$g(x) = \int_a^b G(u) B(u, x)\, du, \quad G(u) = \int_\alpha^\beta g(\xi) M(u, \xi)\, d\xi \tag{1}$$

либо разложение

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k B(u_k, x), \quad G_k = \int_\alpha^\beta g(\xi) M(u_k, \xi)\, d\xi, \tag{2}$$

и пусть функция $B(u, x)$) является решением линейного дифференциального уравнения второго порядка по x, именно:

$$(L - u^2) B(u, x) = 0, \tag{3}$$

а числа u_k составляют счетное множество нулей некоторого трансцендентного уравнения, причем $a \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant b$.

Рассмотрим теперь парное интегральное уравнение (парный ряд — уравнение)

$$\begin{gathered}\int_a^b Q(u) \rho(u) K(u) B(u, x)\, dh(u) = f(x), \quad c \leqslant x \leqslant d, \\ \int_a^b Q(u) B(u, x)\, dh(u) = 0, \quad \alpha \leqslant x < c, \quad d < x \leqslant \beta,\end{gathered} \tag{4}$$

где для (1) функция $h(u) \equiv u$, а для (2)

$$h(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [1 + \operatorname{sgn}(u - u_k)]. \tag{5}$$

Функция $\rho(u)$ такова, что при $K(u) \equiv 1$ решение уравнения (4) известно; $K(u)$ — четная, мероморфная функция, представимая в виде

$$K(u) = A \frac{P_1(u^2)}{P_2(u^2)} = A \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + u^2/\delta_n^2)}{(1 + u^2/\gamma_n^2)}, \quad A = \text{const}, \tag{6}$$

где $\pm i\delta_n$ и $\pm i\gamma_n$ — счетное множество простых нулей и полюсов.

Пусть также δ_n и γ_n монотонно возрастают по модулю с ростом номера, обеспечивая сходимость бесконечного произведения (6), а на любой правильной системе контуров C_n, $C_n \subset C_{n+1}$, имеет место оценка

$$K(u) \sim O(|u|^p), \quad p \leqslant 1. \tag{7}$$

2. Используя формулы (3) и (6), представим первое соотношение уравнения (4) в форме

$$AP_1(L)p(x) = P_2(L)f(x), \quad c \leqslant x \leqslant d; \tag{8}$$

здесь $P_1(L)$ и $P_2(L)$ — дифференциальные операторы по x бесконечного порядка,

$$p(x) = \int_a^b Q(u)\rho(u)B(u, x)\,dh(u). \tag{9}$$

Решение дифференциального уравнения (8) относительно $p(x)$ можно представить в виде

$$p(x) = \frac{P_2(L)}{AP_1(L)} f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n R(\delta_n, x) + D_n S(\delta_n, x)]; \tag{10}$$

здесь первое слагаемое есть частное решение неоднородного уравнения, определяемое символическим методом, а бесконечная сумма дает общее решение однородного уравнения, причем $R(u, x) = B(iu, x)$, $S(u, x) = C(iu, x)$, где $C(u, x)$ — решение дифференциального уравнения (3), линейно независимое с $B(u, x)$.

Соотношение (9) и второе соотношение (4) дают следующее парное уравнение:

$$\begin{gathered} \int_a^b Q(u)\rho(u)B(u, x)\,dh(u) = p(x), \quad c \leqslant x \leqslant d, \\ \int_a^b Q(u)B(u, x)\,dh(u) = 0, \quad \alpha \leqslant x < c, \quad d < x \leqslant \beta, \end{gathered} \tag{11}$$

решение которого, по предположению, может быть найдено:

$$Q(u) = \int_c^d p(\xi)N(u, \xi)\,d\xi, \quad N(u, \xi) = M(u, \xi) \quad \text{при } \rho(u) \equiv 1. \tag{12}$$

Для дальнейшего положим $f(x) = B(\varepsilon, x)$, имея в виду, что в общем случае функция $f(x)$ может быть представлена интегралом (1) или рядом (2). Первое слагаемое в (10) принимает вид $K^{-1}(\varepsilon)B(\varepsilon, x)$. С учетом этого, подставляя (10) в (12), получим

$$\begin{gathered} Q(u) = K^{-1}(\varepsilon)\varphi(u, -i\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n\varphi(u, \delta_n) + D_n\psi(u, \delta_n)], \\ \varphi(u, \varkappa) = \int_c^d R(\varkappa, \xi)N(u, \xi)\,d\xi, \quad \psi(u, \varkappa) = \int_c^d S(\varkappa, \xi)N(u, \xi)\,d\xi. \end{gathered} \tag{13}$$

Теперь постоянные C_n и D_n необходимо определить из условия удовлетворения исходного парного уравнения (4) решением (13). Подставляя (13) в первое соотношение (4) и принимая во внимание, что по построению

$$\int_a^b \varphi(u, -i\varepsilon)\rho(u)B(u, x)\,dh(u) = f(x), \quad c \leqslant x \leqslant d, \tag{14}$$

а также, что $K(i\delta_n)=0$, будем иметь

$$K^{-1}(\varepsilon)\int_a^b \varphi(u,-i\varepsilon)\,\rho(u)\,[K(u)-K(\varepsilon)]\,B(u,x)\,dh(u)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{C_n\int_a^b \varphi(u,\delta_n)\,\rho(u)\,[K(u)-K(i\delta_n)]\,B(u,x)\,dh(u)+$$

$$+D_n\int_a^b \psi(u,\delta_n)\,\rho(u)\,[K(u)-K(i\delta_n)]\,B(u,x)\,dh(u)\Big\}=0. \qquad (15)$$

Заметим, что мероморфную функцию $K(u)$, при сделанных относительно нее предположениях, можно представить в виде суммы главных значений

$$\begin{gathered} K(u)=A-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_k u^2}{\gamma_k\,(u^2+\gamma_k^2)}, \\ s_k=\pi i\,\{[K^{-1}(i\gamma_k)]'\}^{-1}, \quad \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_k}{\gamma_k}=A \quad \text{при } p<0. \end{gathered} \qquad (16)$$

Учитывая далее (16), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}s_k\gamma_k\left\{\frac{K^{-1}(\varepsilon)}{\gamma_k^2+\varepsilon^2}\,T_k(x,\,-i\varepsilon)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_k^2-\delta_n^2}\,[C_nT_k(x,\delta_n)+D_nU_k(x,\delta_n)]\right\}=0,$$
$$c\leqslant x\leqslant d,$$

$$T_k(x,\mu)=\int_a^b\frac{u^2+\mu^2}{u^2+\gamma_k^2}\,\varphi(u,\mu)\,\rho(u)\,B(u,x)\,dh(u), \qquad (17)$$

$$U_k(x,\mu)=\int_a^b\frac{u^2+\mu^2}{u^2+\gamma_k^2}\,\psi(u,\mu)\,\rho(u)\,B(u,x)\,dh(u).$$

Дальнейшее исследование соотношения (17) наталкивается на необходимость знания конкретного вида функций $N(u,\xi)$, $\varphi(u,\varkappa)$, $\psi(u,\varkappa)$, $T_k(x,\mu)$, $U_k(u,\mu)$. Тем не менее окончательный вид структуры соотношения (17) может быть установлен. Для этого решим дифференциальное уравнение (8) относительно $f(x)$. Будем иметь

$$f(x)=\frac{AP_1(L)}{P_2(L)}\,p(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[E_kR(\gamma_k,x)+F_kS(\gamma_k,x)], \quad c\leqslant x\leqslant d. \qquad (18)$$

Постоянные E_k и F_k определим из условия совпадения (18) с первым соотношением (4), а следовательно, и с (17). Очевидно, E_k и F_k будут некоторыми линейными функционалами от $p(x)$, т. е. $E_k=E_k(p)$, $F_k=F_k(p)$. Подставим теперь в (18) выражение (10) функции $p(x)$. Учитывая, что

$$\frac{AP_1(L)}{P_2(L)}\,R(\delta_n,x)=\frac{AP_1(L)}{P_2(L)}\,S(\delta_n,x)=0, \qquad (19)$$

и обозначая

$$\begin{gathered} E_k^*=E_k[B(\varepsilon,x)], \quad E_{kn}^+=F_k[R(\delta_n,x)], \quad E_{kn}^-=E_k[S(\delta_n,x)], \\ F_k^*=F_k[B(\varepsilon,x)], \quad F_{kn}^+=F_k[R(\delta_n,x)], \quad F_{kn}^-=F_k[S(\delta_n,x)], \end{gathered} \qquad (20)$$

приведем (18), а следовательно, и (17), к виду

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[(C_nE_{kn}^{+}+D_nF_{kn}^{+})R(\gamma_k,x)+(C_nE_{kn}^{-}+D_nF_{kn}^{-})S(\gamma_k,x)]+$$

$$+K^{-1}(\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty}[E_k^{*}R(\gamma_k,x)+F_k^{*}S(\gamma_k,x)]=0. \tag{21}$$

Предполагая, наконец, линейную зависимость функций $R(\gamma_k, x)$ и $S(\gamma_k, x)$, $k=1, 2, \ldots, \infty$, получим для определения постоянных C_n и D_n две бесконечные алгебраические системы

$$\begin{gathered}K^{-1}(\varepsilon)E_k^{*}+\sum_{n=1}^{\infty}(C_nE_{kn}^{+}+D_nF_{kn}^{+})=0,\\ K^{-1}(\varepsilon)F_k^{*}+\sum_{n=1}^{\infty}(C_nE_{kn}^{-}+D_nF_{kn}^{-})=0.\end{gathered} \tag{22}$$

3. Рассмотрим парное интегральное уравнение, связанное с преобразованием Ханкеля

$$\begin{gathered}\int_0^{\infty}Q(u)\rho(u)K(u)uJ_\nu(ux)\,du=J_\nu(\varepsilon x),\quad 0\leqslant x\leqslant a,\\ \int_0^{\infty}Q(u)uJ_\nu(ux)\,du=0,\quad a<x<\infty.\end{gathered} \tag{23}$$

Пусть $\rho(u)=u^{-1}$. При $\nu=0, 1$ соответственно имеем

$$\begin{gathered}Q(u)=\frac{2}{\pi}\frac{u\sin ua\cos\varepsilon a-\varepsilon\cos ua\sin\varepsilon a}{K(\varepsilon)(u^2-\varepsilon^2)}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{u\sin ua\,\mathrm{ch}\,\delta_na+\delta_n\cos ua\,\mathrm{sh}\,\delta_na}{u^2+\delta_n^2},\\ Q(u)=\frac{2}{\pi}\frac{\varepsilon\sin ua\cos\varepsilon a-u\cos ua\sin\varepsilon a}{K(\varepsilon)(u^2-\varepsilon^2)}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{\delta_n\sin ua\,\mathrm{ch}\,\delta_na-u\cos ua\,\mathrm{sh}\,\delta_na}{u^2+\delta_n^2}.\end{gathered} \tag{24}$$

Для определения постоянных C_n получим систему

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{\gamma_k\,\mathrm{ch}\,\delta_na+\delta_n\,\mathrm{sh}\,\delta_na}{\gamma_k^2-\delta_n^2}+\frac{\gamma_k\cos\varepsilon a-\varepsilon\sin\varepsilon a}{K(\varepsilon)(\gamma_k^2+\varepsilon^2)}=0. \tag{25}$$

В заключение отметим, что аналогичным образом могут быть рассмотрены парные интегральные уравнения типа (4), порожденные интегральными преобразованиями Фурье, Мелера — Фока, Канторовича — Лебедева, могут быть рассмотрены парные ряды по тригонометрическим функциям, функциям Бесселя, присоединенным функциям Лежандра и т. д. Отметим также, что метод допускает обобщение на двумерные парные уравнения.

Посвящаю эту работу памяти моего отца.

Ростовский государственный университет

Поступило 7 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Бабешко, ПММ, **31**, в. 1 (1967), **33**, в. 6 (1969); ДАН, **192**, № 1 (1970), 204, № 2 (1972). [2] В. М. Александров, ПММ, **27**, в. 5 (1963); **31**, в. 6 (1967); **32**, в. 4 (1968).