

С. Д. БЕРМАН, З. П. ЖИЛИНСКАЯ

**О СОВМЕСТНЫХ ПРЯМЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ  
КОНЕЧНО-ПОРОЖДЕННОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ  
И ЕЕ ПОДГРУППЫ**

(Представлено академиком В. М. Глушковым 16 X 1972)

Результаты настоящей статьи связаны с классической теоремой об инвариантных множителях:

если  $G$  — свободная абелева группа с конечным числом образующих, а  $H$  — ее подгруппа, то существуют такие прямые разложения группы  $G$  и ее подгруппы  $H$

$$G = (u_1) + \dots + (u_s), \quad H = (v_1) + \dots + (v_t),$$

что  $v_i = \varepsilon_i u_i$ ,  $1 \leq i \leq t$ , и  $\varepsilon_{j+1} \equiv 0 \pmod{\varepsilon_j}$ ,  $j = 1, \dots, t-1$ .

Простые примеры показывают, что эта теорема не переносится на не-свободные абелевы группы с конечным числом образующих ((<sup>1</sup>), стр. 53). В связи с этим возникает общая задача изучения совместных прямых разложений конечно-порожденной абелевой группы и ее подгруппы.

Пусть  $G$  — группа с операторами, а  $H$  — нормальный делитель группы  $G$ . Пару  $(G, H)$  назовем разложимой в прямое произведение пар  $(G_1, H_1)$  и  $(G_2, H_2)$ , если группа  $G$  разлагается в прямое произведение  $G = G_1 \times G_2$  и при этом  $H = H_1 \cdot H_2$ , где  $H_1 \subseteq G_1$ ,  $H_2 \subseteq G_2$ . В этом случае будем употреблять запись  $(G, H) = (G_1, H_1) \times (G_2, H_2)$ .

Пары  $(G, H)$  и  $(G', H')$  назовем изоморфными, если существует изоморфизм  $f: G \rightarrow G'$  такой, что  $f(H) = H'$ .

Пусть  $G$  — конечно-порожденная абелева группа. Прямые разложения пар  $(G, H)$  естественно изучать, считая, что  $G$  принадлежит классу  $\mathfrak{A}$  групп, замкнутому относительно операции прямой суммы. Мы будем рассматривать классы  $\mathfrak{A}$ , которые состоят из групп с фиксированными различными инвариантами. Запись  $\mathfrak{A} = (\infty, p_1^{i_1}, p_2^{i_2}, \dots)$  ( $p_i$  — простые) означает, что порядок каждого неразложимого циклического слагаемого в прямом разложении группы  $G$  совпадает с одним из чисел в фигурных скобках. Если  $G$  пробегает класс  $\mathfrak{A}$ , то все возможные пары  $(G, H)$  относительно операции прямой суммы образуют коммутативную полугруппу  $B(\mathfrak{A})$ .

Для конечно-порожденной абелевой группы  $G$  степенью любой пары  $(G, H)$  назовем число неразложимых циклических слагаемых в прямом разложении группы  $G$ .

Если  $\mathfrak{A} = \{\infty\}$  (класс свободных абелевых групп конечного ранга), то степень каждой неразложимой пары  $(G, H)$  равна 1. В этом случае для прямых разложений пар  $(G, H)$ , очевидно, не имеет места теорема Крулля — Шмидта, но выполняется более слабое свойство:  $B(\mathfrak{A})$  является полугруппой с сокращением. В связи с этими фактами, прямо вытекающими из теоремы об инвариантных множителях, возникают следующие задачи:

1) охарактеризовать классы  $\mathfrak{A}$ , для которых степени неразложимых пар  $(G, H)$  ограничены;

2) исследовать отклонения от теоремы Крулля — Шмидта для прямых разложений пар  $(G, H)$ ,  $G \in \mathfrak{A}$ , и, в частности, свойство сокращения в полугруппе  $B(\mathfrak{A})$ .

Эти вопросы связаны с изучением взаимоотношений между локальными и глобальными свойствами пар, и поэтому мы не ограничиваемся случаем абелевых групп и рассматриваем также пары конечно-порожденных модулей над локальным кольцом.

**Теорема 1.** Пусть  $G$  — группа с операторами, обладающая главным рядом, а  $H$  — нормальный делитель группы  $G$ .

Тогда любые два разложения пары  $(G, H)$  в прямые произведения неразложимых пар  $(G, H) = (G_1, H_1) \times \dots \times (G_s, H_s)$  и  $(G, H) = (G'_1, H'_1) \times \dots \times (G'_k, H'_k)$  центрально изоморфны, т. е.  $s = k$ , и после перенумерации множителей для каждого  $i, i = 1, \dots, k$ , существует такой центральный автоморфизм  $f$  группы  $G$ , что  $f(G_i) = G'_i, f(H_i) = H'_i$ .

Доказательство теоремы легко провести путем незначительной модификации рассуждений в классическом доказательстве теоремы Крулля — Шмидта <sup>(2)</sup>.

В дальнейшем будем рассматривать только пары  $(G, H)$ , где  $G$  — конечно-порожденный модуль над коммутативным кольцом главных идеалов  $R$ , а  $H$  — подмодуль модуля  $G$ .

Условимся употреблять следующие значения:  $R$  — коммутативное кольцо главных идеалов;  $Z$  — кольцо целых рациональных чисел;  $J_p$  — кольцо целых  $p$ -адических (рациональных) чисел;  $F_p$  — коммутативное кольцо с единицей, все нетривиальные идеалы которого являются степенями главного идеала  $(p) \neq F_p$ . Кольцо  $F_p$  будем в дальнейшем называть локальным кольцом.

Назовем  $R$ -модуль  $G$  периодическим, если аннулятор каждого ненулевого элемента  $x \in G$  является ненулевым идеалом кольца  $R$ .

Из теоремы 1 вытекает

**Теорема 2.** Если  $G$  — конечно-порожденный периодический  $R$ -модуль, а  $H$  — подмодуль модуля  $G$ , то изоморфны любые два разложения пары  $(G, H)$  в прямую сумму неразложимых пар.

Теорема 2, вообще говоря, неверна для непериодических  $R$ -модулей. Мы уже отмечали, что она не выполняется даже для свободных абелевых групп с конечным числом образующих.

Пусть, по-прежнему,  $G$  — конечно-порожденный  $R$ -модуль, а  $H$  — подмодуль модуля  $G$ . В  $G$  однозначно выделяется максимальный периодический подмодуль  $N$  — совокупность всех элементов модуля  $G$ , аннуляторы которых являются ненулевыми идеалами кольца  $R$ . Пусть  $G \neq N$ . Тогда пара  $(G, H)$  однозначно определяет пару  $(G/N, H + N/N)$ , где  $G/N$  — свободный модуль. Инвариантные множители последней мы будем называть также инвариантными множителями пары  $(G, H)$ .

Разложим модуль  $N$  в прямую сумму примарных модулей

$$N = N_{p_1} \dot{+} \dots \dot{+} N_{p_k}, \quad (1)$$

где  $p_1, \dots, p_k$  — попарно различные простые элементы кольца  $R$  и  $\text{ann } N_{p_i} = (p^{\mu_i}), i = 1, \dots, k; \mu_i > 0$ . Положим

$$N^{(i)} = N_{p_1} \dot{+} \dots \dot{+} N_{p_{i-1}} \dot{+} N_{p_{i+1}} \dot{+} \dots \dot{+} N_{p_k}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Тогда пара  $(G, H)$  однозначно определяет пары

$$(G/N^{(i)}, H + N^{(i)}/N^{(i)}) = (G^{(i)}, H^{(i)}), \quad i = 1, \dots, k.$$

Периодическая часть модуля  $(G, H)$  есть примарный по  $p_i$  модуль, изоморфный модулю  $N_{p_i}$  в (1),  $i = 1, \dots, k$ . Будем называть пару  $(G^{(i)}, H^{(i)})$   $p_i$ -компонентой пары  $(G, H)$ .

Следующая теорема показывает, что задача изоморфизма пар  $(G, H)$  «локализуется по периодической части».

**Теорема 3.** Пары  $(G, H)$  и  $(\tilde{G}, \tilde{H})$  над кольцом  $R$  изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны соответствующие примарные компоненты этих пар  $(G^{(i)}, H^{(i)})$  и  $(\tilde{G}^{(i)}, \tilde{H}^{(i)})$  для всех простых  $p_i$ , делящих аннуляторы максимальных периодических подмодулей модулей  $G$  и  $\tilde{G}$ .

**Теорема 4.** Если  $G$  — конечно-порожденный модуль над локальным кольцом  $F_p$ , то изоморфны любые два разложения пары  $(G, H)$  в прямую сумму неразложимых пар.

Если  $G$  — конечно-порожденная абелева группа, а  $H$  — подгруппа группы  $G$ , то естественным образом можно определить тензорное произведение этой пары с кольцом  $J_p$ . Будем обозначать это произведение через  $J_p(G, H)$ .

**Теорема 5.** Пусть  $G$  — конечно-порожденная абелева группа, периодическая часть которой является  $p$ -группой, а  $H$  — подгруппа группы  $G$ . Пара  $(G, H)$  разложима тогда и только тогда, когда разложима пара  $J_p(G, H)$ .

**Теорема 6.** Пусть  $G$  — группа с различными инвариантами  $p^n, p^m, n > m$ .

I. Если  $m \leq 2$ , то при любом  $n$  степени неразложимых компонент любой пары  $(G, H)$  не превосходят числа 3, а при  $m = 1$  они не превосходят числа 2. При  $m = 3$  для любого  $n_0 > 0$  существует такая группа  $G$  с инвариантами  $p^n, p^3$  и такая ее подгруппа  $H$ , что пара  $(G, H)$  неразложима и ее степень больше, чем  $n_0$ .

II. Если  $n - m \leq 2$ , то при переменных  $m$  и  $n$  степени неразложимых компонент любой пары не превосходят числа 2, а при  $n - m = 1$  они равны 1. Если  $n - m = 3$ , то при переменных  $n$  и  $m$  существуют неразложимые пары сколь угодно большой степени.

III. Если  $\mathfrak{A} = \{p^n, p^m\}$  и  $m \geq 4, n - m \geq 4$ , то существуют неразложимые пары  $(G, H), G \in \mathfrak{A}$ , сколь угодно большой степени.

**Лемма 1.** Если  $\mathfrak{A} = \{\infty, p^n\}, n \geq 3$ , то степени неразложимых пар  $(G, H), G \in \mathfrak{A}$ , не ограничены.

Пусть  $\mathfrak{A} = \{\infty, p, p^2\}$  и  $G \in \mathfrak{A}$ . Тогда степени неразложимых пар  $(G, H), G \in \mathfrak{A}$ , равны 1, 2 и 3. Неразложимые пары степени 3 описываются так:

$$G = (a_1) + (a_2) + (b),$$

где  $a_1, a_2$  — свободные образующие,  $b$  — элемент порядка  $p^2$ ;

$$H = (c_1) + (c_2),$$

где  $c_1 = \varepsilon a_1 + b, c_2 = \eta a_2 + \delta p b, \varepsilon = p^{\alpha_1} q_1, \eta = p^{\alpha_2} q_2, (q_i, p) = 1, i = 1, 2, \varepsilon \wedge \eta, \alpha_2 - \alpha_1 \geq 2, \alpha_1 \geq 1$ . Если  $p = 4m + 3$  или  $p = 2$ , то  $\delta = 1$ ; при  $p = 4m + 1$  существуют точно два типа пар  $A_{31}$  и  $A_{32}$ , где  $\delta = 1$  для  $A_{31}$  и  $\delta$  — любой квадратичный невычет по mod  $p$  для пары  $A_{32}$ .

Наиболее интересными среди неразложимых пар леммы 1 являются пары  $A_{32}$  ( $p = 4m + 1$ ). Все остальные неразложимые пары определяются локальными инвариантами, а пары  $A_{32}$  характеризуются еще одним существенно целочисленным инвариантом — символом Лежандра  $(\delta/p) = -1$ , который исчезает при расширении кольца  $Z$  до кольца целых  $p$ -адических чисел  $J_p$ .

**Теорема 7.** Пусть  $G$  пробегает класс  $\mathfrak{A} = \{\infty, p_1^{i_1}, p_2^{i_2}, \dots\}, p_1, p_2, \dots$  простые. Степени неразложимых пар  $(G, H)$  ограничены тогда и только тогда, когда все конечные инварианты класса  $\mathfrak{A}$  не делятся на куб\*. В этом случае эти степени не превосходят числа  $2 + k$ , где  $k$  — число различных простых  $p_i$  в  $\mathfrak{A}$ .

**Доказательство** теоремы проходит через теоремы 3, 4, 5 и лемму 1.

Отметим аналогию между теоремой 7 и теоремой из теории целочисленных представлений групп:

Степени неразложимых  $Z$ -представлений циклической группы ограничены тогда и только тогда, когда ее порядок делится на куб<sup>(3)</sup>.

Пусть  $\mathfrak{A} = \{\infty, p, p^2\}$ . Разложение  $(G, H) = A_1 + \dots + A_q, G \in \mathfrak{A}$ , в прямую сумму неразложимых пар назовем специальным, если инва-

\* Подчеркнем, что по условию теоремы класс  $\mathfrak{A}$  обязательно содержит группы с инвариантом  $\infty$ .

риантные множители каждой пары  $A_i$  содержатся среди инвариантных множителей пары  $(G, H)$ .

**Теорема 8.** Пусть  $G = \{\infty, p\}$  или  $\mathfrak{A} = \{\infty, p, p^2\}$  и  $p \neq 4t + 1$ . Тогда любые два специальных разложения пары  $(G, H)$ ,  $G \in \mathfrak{A}$ , в прямую сумму неразложимых пар изоморфны.

Если  $\mathfrak{A} = \{\infty, p, p^2\}$ ,  $p = 4t + 1$ , и  $G, G' \in \mathfrak{A}$ , то пары  $(G, H)$  и  $(G', H')$  изоморфны тогда и только тогда, когда для их специальных разложений  $(G, H) = A_1 + \dots + A_q$  и  $(G', H') = A'_1 + \dots + A'_s$  одновременно выполняются следующие условия:

1)  $q = s$  и после соответствующей перенумерации пары  $A_i$  и  $A'_i$  либо изоморфны, либо отличаются друг от друга только значением арифметического инварианта  $(\delta / p)^*$ ;

2) если среди пар  $A_i, (A'_i)$  встречаются только пары степени 3 и пары  $(F, 0)$ , где  $F$  — примарная циклическая группа, то произведение всех символов Лежандра, соответствующих парам  $A_i$  степени 3, равно такому же произведению для пар  $A'_i$ .

Следствием теоремы 8 является

**Теорема 9.** Если порядки конечных неразложимых компонент групп класса  $\mathfrak{A} = \{\infty, \dots\}$  не делятся на квадрат, то  $B(\mathfrak{A})$  — полугруппа с сокращением, а если порядки этих компонент не делятся на куб, то  $B(\mathfrak{A})$  является полугруппой с сокращением тогда и только тогда, когда для каждого конечного нечетного инварианта  $p^2$  класса  $\mathfrak{A}$  число  $p$  равно  $4t + 3$ .

**Теорема 10.** Для каждого простого  $p$  существует такое натуральное  $n$ , что для класса  $\mathfrak{A} = \{\infty, p^n\}$  в полугруппе  $B(\mathfrak{A})$  не выполняется свойство сокращения.

Харьковский институт радиоэлектроники  
Ужгородский государственный  
университет

Поступило  
4 X 1972

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> М. Холл, Теория групп, ИЛ, 1962. <sup>2</sup> А. Г. Курош, Теория групп, «Наука», 1967. <sup>3</sup> С. Д. Берман, П. М. Гудивок, ДАН, 145, № 6, 1199 (1962).

\* Последнее может быть только в том случае, когда степени неразложимых пар равны 3.