Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 1

УДК 513.832/835

МАТЕМАТИКА

А. М. ВИНОГРАДОВ

МНОГОЗНАЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И ПРИНЦИП КЛАССИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 29 VI 1972)

Эта заметка содержит описание того фрагмента проективной теории дифференциальных уравнений, который естественным образом возникает при попытке дать «геометрическую реализацию» алгебры логики теории дифференциальных операторов (см. ([1])). На этом пути мы придем к соответствующему обобщению понятия решения дифференциального уравнения и некоторому принципу классификации дифференциальных уравнений. Основное в этой заметке — описание структуры «аффинной карты», входящей в состав проективной теории.

1. Наводящие соображения. Таковые мы получим, «категорным» образом интерпретировав «гамильтонов формализм». Пусть M — гладкое многообразие (конфигурационное), $\Phi = T^*(M)$ — его кокасательное пространство (фазовое), π: $T^*(M) \to M$ — естественная проекция и $\Lambda_p(M)$ — $C^\infty(M)$-модуль гладких дифференциальных форм степени p на M. Если $\theta \in \Lambda_1(M)$, то «график θ» — это отображение s_θ: $M \to T^*(M)$, $s_\theta(x) = \theta_x$, $x \in M$, $\theta_x \in T_x^*(M)$. Универсальная форма $\rho \in \Lambda_1(\Phi)$, определяемая однозначно тем условием, что

$$s_\theta^*(\rho) = \theta \quad \forall \theta \in \Lambda_1(M), \tag{I}$$

есть не что иное, как классическая форма $p\,dq$.

В силу локальной точности последовательности

$$0 \to C^\infty(\Phi) \xrightarrow{d} \Lambda_1(\Phi) \xrightarrow{d} \Lambda_2(\Phi),$$

форма θ является локально точной только в том случае, когда $s_\theta^*(d\rho) = 0$, что эквивалентно тому, что подмногообразие $s_\theta(M) \subset \Phi$ лагранжево (так как $d\rho = dp \wedge dq$).

Пусть теперь H есть некоторая гладкая функция на Φ, т. е. «гамильтониан». То, что функция f на M есть решение соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби, геометрически означает, что $s_{df}(M)$ лежит на поверхности уровня $H = c$. Но подмногообразие $L = s_{df}(M)$ характеризуется двумя свойствами: 1) оно лагранжево, 2) оно имеет вид «графика». Отказавшись от 2), мы придем к обобщению понятия решения уравнения Гамильтона — Якоби. Итак, обобщенное решение (а вернее, его дифференциал) уравнения Гамильтона — Якоби — это лагранжево многообразие, целиком лежащее на поверхности уровня $H = c$.

Приведенный метод обобщения понятия решения основан на одном лишь факте существования форм ρ и $d\rho$. Поэтому его можно перенести на произвольные уравнения, построив их соответствующие аналоги, что ниже и делается. Отметим, что изложенная точка зрения на решения уравнения Гамильтона — Якоби в неявном виде содержится у В. П. Маслова ([2]).

2. Нелинейные уравнения на многообразии. Рассмотрим расслоенное многообразие k-джетов π_k: $\mathcal{J}_k(M) \to M$ над гладким многообразием M. Через $\mathcal{J}^k(M)$ обозначим $C^\infty(M)$-модуль C^∞-сечений расслоения π_k, а через j_k: $C^\infty(M) \to \mathcal{J}^k(M)$ — оператор, сопоставляющий функции f на M ее k-джет. Под нелинейным уравнением порядка $\leqslant k$ на M мы понимаем замкнутое подмножество $A \subset J^k(M)$. Практически A задается как множество нулей некоторой функции F на

$J^k(M)$ и, если F — достаточно хорошая функция, то A — подмногообразие (с особенностями) и $\operatorname{codim} A = 1$. Выбор координат q на $\mathcal{U} \subset M$ порождает в $\pi_k^{-1}(\mathcal{U})$ координаты $(\ldots, q_i, \ldots, u, \ldots, p_i, \ldots, p_{i_1 \ldots i_k}, \ldots)$, где функции $p_{i_1 \ldots i_s}$, $s \leqslant k$, не зависят от порядка индексов, которые принимают значения от 1 до n. Множество A тогда задается уравнением $F(q, u, \ldots \ldots, p_i, \ldots, p_{i_1 \ldots i_k}, \ldots) = 0$, а соответствующее уравнение выглядит так:

$$F(q, u, \ldots, \partial u / \partial q_i, \ldots, \partial^k u / \partial q_{i_1 \ldots},) = 0.$$

Далее всякой $f \in C^\infty(M)$ сопоставим сечение («график» k-джета функции f) $s_{j_k(f)}$: $M \to J^k(M)$, которое в координатах точке q сопоставляет $(q, f(q), \ldots, \partial^k f / \partial q_{i_1 \ldots},)$. Так что, говоря геометрически, f есть решение уравнения $F = 0$, если $s_{j_k(f)}(M) \subset A$.

Действуя как и в п. 1, всякому k-джету $\theta \in \mathcal{J}^k(M)$ сопоставим сечение s_θ: $M \to J^k(M)$ и определим универсальный k-джет $\rho_k \in \mathcal{J}^k(J^k(M))$, потребовав, чтобы *

$$s_\theta^*(\rho_k) = \theta \qquad \forall \theta \in \mathcal{J}^k(M). \tag{II}$$

Нетрудно убедиться, что ρ_k существует и единственна.

Пример. Пусть $k = 1$. Естественным образом можно понимать 1-джет на многообразии X как пару (f, λ), $f \in C^\infty(X)$, $\lambda \in \Lambda_1(X)$. Тогда $\rho_1 = (\mu^*(\rho_0), \rho)$, где μ: $J^1(M) \to J^0(M)$ — естественная проекция, или, в координатах, $\rho_1 = (u, p\, dq)$. Кроме того, $\rho_0 = u$ есть, очевидно, каноническая проекция $J^0(M) = M \times R \to R$ (u — координата в R).

3. Структурный элемент. Для того чтобы, действуя как и в п. 1, иметь возможность охарактеризовать подмногообразия $s_{j_k(f)}(M) \subset J^k(M)$ среди всех подмногообразий вида $s_\theta(M)$, нам надо построить оператор $S_k = S_k(M)$: $\mathcal{J}^k(M) \to ?$, естественный на категории многообразий (т. е. $f^* \circ S_k(Y) = S_k(X) \circ f^*$, f: $X \to Y$ — гладкое отображение) и делающий последовательность $C^\infty(M) \xrightarrow{j_k} \mathcal{J}^k(M) \xrightarrow{S_k} ?$ точной. В п. 1 в такой роли выступал оператор d: $\Lambda_1(M) \to \Lambda_2(M)$, делавший точной (локально) последовательность $C^\infty(M) \xrightarrow{d} \Lambda_1(M) \xrightarrow{d} \Lambda_2(M)$. Нужный нам оператор S_k предоставляет теория Спенсера; именно, так называемая первая резольвента Спенсера для 1-мерного тривиального расслоения начинается членами

$$C^\infty(M) \xrightarrow{j_k} \mathcal{J}^k(M) \xrightarrow{D} \mathcal{J}^{k-1}(M) \otimes \Lambda_1(M)$$

(см. ([3])), так что мы полагаем $S_k = D$. Инвариантное описание оператора S_k состоит в следующем (мы далее пользуемся обозначениями и определениями из ([1])). Естественные морфизмы функторов $D(\mathrm{Diff}^+_{k-1}) \xrightarrow{\mathrm{S}^1_k} \mathrm{Diff}_k^+ \xrightarrow{\text{Д}} \mathrm{id}$ над кольцом $K = C^\infty(M)$, где id — тождественный функтор, в соответствующей (неплюсовой) модульной структуре реализуется последовательностью

$$\mathrm{Hom}_K(\mathcal{J}^{k-1}(\Lambda_1), \ldots) \xrightarrow{\mathrm{S}^1_k} \mathrm{Hom}_K(\mathcal{J}^k, \ldots) \xrightarrow{\text{Д}} \mathrm{Hom}(K, \ldots),$$

что в свою очередь приводит к последовательности представляющих модулей

$$K \xrightarrow{i_k} \mathcal{J}^k \xrightarrow{\Phi_k} \mathcal{J}^{k-1}(\Lambda_1).$$

В кольцах $\mathcal{J}^s = \mathcal{J}^s(\Lambda_1)$ рассмотрим инволютивный автоморфизм τ_s: $\mathcal{J}^s \to \mathcal{J}^s$, однозначно определяемый тем, что $\tau_s \circ i_s = j_s$ и $\tau_s \circ j_s = i_s$. τ_s, таким образом, порождает гомоморфизмы K-модулей $\mathcal{J}^s \to \mathcal{J}_+^s$ и $\mathcal{J}_+^s \to \mathcal{J}^s$. Рассмотрим гомоморфизм $\tau_s \otimes 1$: $\mathcal{J}^s(\Lambda_1) = \mathcal{J}_+^s \otimes_K \Lambda_1 \to \mathcal{J}^s \otimes_K \Lambda_1$. Тогда из точности приведенной выше последовательности и определения τ_s полу-

---

* В формулах знак $\mathcal{J}$ идентичен $\mathcal{J}$ в тексте.

чаем последовательность

$$K \xrightarrow{j_k = \tau_k \circ i_k} \mathcal{Y}^k \xrightarrow{(\tau_{k-1} \otimes 1) \circ \psi_k \circ \tau_k = S_k} \mathcal{Y}^{k-1} \otimes_K \Lambda_1.$$

S_k — оператор первого порядка, так как таковым является S_k^1.

Из приведенного описания немедленно вытекает естественность S_k в категории всех коммутативных колец, (а не только гладких многообразий) и то, что $\operatorname{im} j_k = \ker S_k$ в категории многообразий.

Введем, далее, структурный элемент

$$U_k = S_k(\rho_k) \in \mathcal{Y}^{k-1}(J^k(M)) \underset{C^\infty(J^k(M))}{\otimes} \Lambda_1(J^k(M)).$$

Тогда, повторяя рассуждения п. 1, получим следующее утверждение.

Теорема 1. $U_k|_{s_\theta(M)} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\theta = j_k(f)$ *для некоторого* $f \in C^\infty(M)$.

Пример. Если $k = 1$, то $S_1((f, \lambda)) = df - \lambda$ и, значит, $U_1 = du - p\,dq$ в описанных выше координатах.

4. Обобщенные решения. Рассмотрим уравнение $A \subset J^k(M)$. Учитывая теорему 1, видим, что «графики» решений этого уравнения суть такие подмногообразия $L^n \subset A$, что $L = s_\theta(M)$ для некоторого $\theta \in \mathcal{J}^k(M)$ и $U_k|_L = 0$. Поэтому, как и в п. 1, естественным образом мы приходим к следующему определению: n-мерное подмногообразие $L \subset A$ есть решение (многозначное) уравнения $A \subset J^k(M)$, если $U_k|_L = 0$.

Подмногообразие $L^n \subset J^k(M)$ будем называть R-многообразием, если $U_k|_{L^n} = 0$. Таким образом, многозначные решения — это R-многообразия, лежащие в A, причем обычные решения соответствуют таким R-многообразиям L, что $\pi_k|_L$ — диффеоморфизм. Особенности проекции $\pi_k|_L$ связаны с наличием у решения бесконечных производных порядка $k+1$. Естественное желание рассматривать также решения с бесконечными производными порядка $s \leqslant k$ приводит к необходимости пополнить надлежащим образом многообразие $J^k(M)$. Например, в случае, когда $s = 2$, $k \geqslant 2$, это делается так. Назовем R_l-струей в $J^1(M)$ класс R-многообразий, попарно касающихся друг друга со степенью l. Тогда $J^k(M)$ естественно диффеоморфно многообразию всех R_{k-1}-струй в $J^1(M)$, диффеоморфно проектирующихся на M. Пополнение $\bar{J}^k(M)$ можно тогда определить как многообразие всех R_{k-1}-струй в $J^1(M)$ и распространить на него понятие R-многообразия. При этом $P_k(M) = \bar{J}^k(M) \setminus J^k(M)$ есть подмногообразие коразмерности 1 в $\bar{J}^k(M)$. Двойственный в $P_k(M)$ класс когомологий есть не что иное, как класс Маслова (см. [2]). Заметим, что сказанное указывает путь построения «высших» классов Маслова, однако этого мы здесь касаться не будем.

5. Принцип классификации. Диффеоморфизм $\alpha\colon W_1 \to W_2$ (W_i — область в $\bar{J}^k(M)$) назовем U-преобразованием, если $\alpha^*(U_k) = U_k$, и классифицирующим преобразованием, если α переводит совокупность максимальных n-мерных R-многообразий в себя. В связи с этим скажем, что уравнение $A_1 \subset J^k(M)$ эквивалентно $A_2 \subset J^k(M)$, если найдутся области $W_i \supset A_i$ и классифицирующее преобразование $\alpha\colon W_1 \to W_2$ такое, что $\alpha(A_1) = A_2$. Заменяя уравнения A_i их ростками ξ_i в точках x_i (т. е. ростками множеств A_i в x_i), назовем уравнения локально эквивалентными в точках x_i, если найдется росток β классифицирующего преобразования такого, что $\beta(x_1) = x_2$ и $\beta(\xi_1) = \xi_2$. Сказанное позволяет поставить задачу локальной классификации уравнений.

Пример. При $k = 1$ $U_1 = du - p\,dq$, так что классифицирующие преобразования суть контактные преобразования формы $du - p\,dq$ и задача локальной классификации в этом случае сводится к классификации ростков гиперповерхностей относительно контактных преобразований. Эта задача в «невырожденном» случае была недавно полностью исследована В. В. Лычагиным [4]. Он показал, что все ростки ξ такие, что $U_1|_\xi \neq 0$

эквивалентны, а классификация ростков «общего положения» с $(U_1|_\xi)_x = 0$ относительно U-преобразований сводится к классификации квадратичных форм относительно канонических преобразований. Этот пример демонстрирует «разумность» приведенной постановки задачи классификации.

6. Структура U-преобразований. Пусть $\pi_{k,l} = \pi_{k,l}(M)$: $\bar{J}^k(M) \to \bar{J}^l(M)$, $k \geqslant l \geqslant 0$,— естественная проекция, порожденная операцией сокращения k-джета до l-джета, а $\nu_{k,l} = \nu_{k,l}(M)$: $\mathcal{J}^k(M) \to \mathcal{J}^l(M)$ — соответствующий гомоморфизм модулей джетов. Пусть также $p_k = p_k(M)$: $J^k(M) \to T^*(M)$ и $\nu_k = \nu_k(M)$: $\mathcal{J}^k(M) \to \Lambda_1(M)$, $k > 0$,— естественные отображения, соответствующие представлению оператора d: $C^\infty(M) \to \Lambda_1(M)$ (понимаемого как оператор порядка $\leqslant k$) в виде композиции

$$C^\infty(M) \xrightarrow{j_k} \mathcal{J}^k(M) \xrightarrow{\nu_k} \Lambda_1(M).$$

Теорема 2. *Справедливы равенства:*

$$\overset{*}{\pi}_{k,l}(\rho_l) = \nu_{k,l}(\rho_k), \quad \overset{*}{\pi}_{k,l}(U_l) = (\nu_{k-1,l-1} \otimes 1)(U_k), \quad \overset{*}{p}_k(\rho) = \nu_k(\rho_k).$$

Напомним, что всякий диффеоморфизм A: $M \to M$ порождает диффеоморфизмы $\bar{A}_k$: $J^k(M) \to J^k(M)$, $k \geqslant 0$. Назовем сдвигом на $t \in R$ диффеоморфизм $J^k(M) \to J^k(M)$, при котором всякий джет $\theta \in \mathcal{J}^k(M)$ переходит в $\theta + i_k(t)$. Из теоремы 2 нетрудно вывести следующий основной результат.

Теорема 3. *Всякий диффеоморфизм B: $J^k(M) \to J^k(M)$, $k > 0$, такой, что $B^*(\rho_k) = \rho_k$ имеет вид $\bar{A}_k$ для некоторого A: $M \to M$. Всякий U-диффеоморфизм B: $J^k(M) \to J^k(M)$, $k > 0$, сохраняет слои отображения p_k и тем самым индуцирует диффеоморфизм $\tilde{B}$: $T^*(M) \to T^*(M)$. $\tilde{B}$ является каноническим преобразованием, сохраняющим слои проекции π при $k > 1$ и только лишь обладающим производящей функцией при $k = 1$.*

Обратно, всякое каноническое преобразование такого рода единственным образом с точностью до сдвига определяет некоторый U-диффеоморфизм. Кроме того, всякое каноническое преобразование, обладающее производящей функцией, порождает в $\bar{J}^k(M)$ классифицирующее преобразование.

Справедливы также локальные аналоги этого результата.

Теорема 4. *Всякое классифицирующее преобразование A: $V_1 \to V_2$, V_i — область в $J^k(M)$ сохраняет слои проекции $\pi_{k,1}$ и, значит, порождает некоторое преобразование A: $\pi_{k,1}(V_1) \to \pi_{k,2}(V_2)$. Преобразование $\bar{A}$ есть контактное преобразование, которым A определено однозначно.*

Теоремы 3 и 4 уясняют важную роль канонических преобразований в теории уравнений с частными производными, которая стала особенно очевидной после работы ([2]).

Замечания. 1) Наши рассмотрения в силу своей категорной природы немедленно переносятся на системы, аналитический или алгебраический (см. ([1])) случай.

2) Классические обобщенные решения линейных уравнений можно получить из наших многозначных, «суммируя» их отдельные ветви. Класс получаемого таким образом решения определяется геометрией особенностей проектирования многозначных решений. По-видимому, все классические обобщенные решения могут быть получены таким способом.

Подробное описание проективной теории вместе с некоторыми результатами локальной классификации дифференциальных уравнений мы дадим в другом месте. Локальную классификацию в нашем смысле уравнений первого порядка недавно осуществил В. В. Лычагин ([4]).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Виноградов, ДАН, **205**, № 5 (1972). [2] В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, 1965. [3] D. C. Spencer, Bull. Am. Math. Soc., **75**, 1 (1969). [4] В. В. Лычагин, ДАН, **210**, № 3 (1973).