Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 5

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

С. ЕЛУБАЕВ

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ДВУХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 26 IX 1972)

В последнее время исследован ряд многомерных обратных задач для уравнения гиперболического типа. В частности, в работах ([2-7]) рассмотрены многомерные обратные задачи в линеаризованной постановке. В работе ([6]) была рассмотрена обратная задача для гиперболического уравнения, исследование которой сводилось к исследованию нелинейного интегрального уравнения.

В данной статье формируются две теоремы единственности. Первая теорема посвящена обратной задаче для системы гиперболических уравнений n-го порядка. Вторая теорема посвящена обратной задаче для гиперболического уравнения 2-го порядка.

Вначале рассмотрим постановку обратной задачи и теорему единственности для системы гиперболических уравнений.

Рассмотрим систему гиперболических уравнений n-го порядка

$$\frac{\partial^n u(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = A(x)\, u(x) \tag{1}$$

с данными на характеристиках

$$u(x, \lambda)|_{x_1=0} = f_1, \quad u(x, \lambda)|_{x_i=0} = f_i, \quad i = 2, \ldots, n-1, \quad u(x, \lambda)|_{x_n=0} = f_n, \tag{2}$$

$$u(x, \lambda)|_{x_i=h_i} = \varphi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — n-мерный вектор, $A(x) = \|a_{ki}\|$, $k, i = 1, 2, \ldots, n,$ — n-мерная квадратная матрица, $\{a_{ki}\}$ — элементы этой матрицы, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ — n-мерная вектор-функция, зависящая от вектора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $0 < \lambda_i < x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $g(x_i - \lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n,$— функции Хевисайда, произведения которых являются компонентами векторов

$$f_1 = (0, g(x_2-\lambda_2) g(x_3-\lambda_3) \ldots g(x_n-\lambda_n), 0, \ldots, 0),$$

$$f_i = (0, \ldots, 0, g(x_1-\lambda_1) \ldots g(x_{i-1}-\lambda_{i-1}) g(x_{i+1}-\lambda_{i+1}) \ldots \ldots g(x_n-\lambda_n), 0, \ldots, 0), \quad i = 2, 3, \ldots, n-1,$$

$$f_n = (g(x_1-\lambda_1) g(x_2-\lambda_2) \ldots g(x_{n-1}-\lambda_{n-1}), 0, \ldots, 0);$$

$\varphi_i = (\varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \ldots, \varphi_{ni})$, $i = 1, 2, \ldots, n,$— известные линейно независимые вектор-функции в n-мерном параллелепипеде $Q[0, h_1; 0, h_2; \ldots, 0, h_n]$; $\varphi_{k1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}, x_{n-1}, \lambda_n)$, $\varphi_{ki}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-2}, x_{i-1}, \lambda_i, \ldots, \lambda_n)$, $\varphi_{kn}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}, x_{n-1}, \lambda_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $i = 2, 3, \ldots, n-1,$ — компоненты этих вектор-функций; h_i, $i = 1, 2, \ldots, n,$— положительные постоянные, а n — некоторое натуральное число.

В данных (2) вторая компонента в векторе f_1, $(i+1)$-я компонента в f_i, $i = 2, 3, \ldots, n-1$, и первая компонента в f_n состоят из произведений $n-1$ функции Хевисайда, а все остальные компоненты этих векторов суть нули.

Задача отыскания вектор-функции $u(x, \lambda)$ в параллелепипеде Q, удовлетворяющая данным (2) и условиям сопряженности при известной матрице $A(x)$, представляет собой прямую задачу для системы (1).

Перейдем теперь к постановке обратной задачи. Обратная задача по отношению к системе (1) заключается в отыскании матрицы $A(x)$ внутри параллелепипеда Q.

Чтобы найти матрицу $A(x)$, необходимо задать данные (2) о решении прямой задачи для системы (1). При этом для однозначного восстановления матрицы $A(x)$, т. е. для нахождения n^2 элементов этой матрицы надо задать еще n^2 различных дополнительных условий. Мы задаем $\{\varphi_{ki}\}$, $k=1, 2, \ldots, n$; $i=1, 2, \ldots, n$, дополнительных условий, т. е. данные (3).

Пусть для матрицы $A(x)$ и для ее элементов в параллелепипеде Q выполняются следующие условия:

1) $A(x)$ — неизвестная непрерывная квадратная матрица и норма ее

$$\|A(x)\| = \sup|\{a_{ki}\}| \leqslant M, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant h_i; \quad k, i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где M — некоторое положительное число, связанное с h_i, $i=1, 2, \ldots, n$, неравенством (5).

$$2)\ n\left[2M\prod_{t=1}^{n} h_t + \sum_{s=2}^{\infty}(s+1)\, n^{s-1}\frac{M^s}{(s!)^n}\prod_{t=1}^{n} h_t^s\right] < 1. \tag{5}$$

Сформулируем постановку задачи.

При выполнении условий (4) и (5) по заданным функциям $\{\varphi_{ki}\}$, k, $i=1, 2, \ldots, n$, в параллелепипеде Q требуется найти элементы $\{a_{ki}\}$, $k, i = 1, 2, \ldots, n$, матрицы $A(x)$ в этом параллелепипеде.

Теорема. *Решение поставленной задачи единственно в шаре $\overline{T}$ в классе функций C, $\overline{T} = \sup|a_{ki}(x)| \leqslant M$, $0 \leqslant x_i \leqslant h_i$; k, $i=1, 2, \ldots, n$.*

Теперь остановимся на второй задаче, которая рассматривается в линеаризованной постановке.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = au \tag{6}$$

с начальными данными

$$u(x, y, t, \lambda, \alpha)|_{t=0} = g(x\cos\alpha + y\sin\alpha - \lambda), \qquad \left.\frac{\partial u(x, y, t, \lambda, \alpha)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

и с граничным условием

$$u(x, y, t, \lambda, \alpha)|_S = \varphi(y, t, \lambda, \alpha),$$

где $u(x, y, t, \lambda, \alpha)$ — семейство решений уравнения (6), зависящее от параметров λ $(R-c<\lambda<R+c)$ и α $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$; $a=a(x, y, t)$ — коэффициент уравнения (6); $g(x\cos\alpha + y\sin\alpha - \lambda)$ — функция Хевисайда; $\varphi(y, t, \lambda, \alpha)$ — известная функция на боковой поверхности S цилиндра $P\,(0 \leqslant t \leqslant c,\ x^2+y^2 \leqslant R^2)$; c и R — любые положительные числа.

Пусть для $a(x, y, t)$ и функции $u(x, y, t)$ выполняются следующие условия:

а) $a(x, y, t)$ является в цилиндре P неизвестной функцией, малой по норме в классе непрерывных функций, так что мы пренебрегаем величинами порядка $\|a\|^2$, и равной нулю вне этого цилиндра;

б) функция $u(x, y, t)$ является регулярной в бесконечности.

Постановка задачи. При выполнении условий а) и б) по заданной функции $\varphi(y, t, \lambda, \alpha)$ на боковой поверхности S цилиндра P требуется найти коэффициент $a(x, y, t)$ уравнения (6) в этом цилиндре.

Теорема. *Решение поставленной задачи единственное в классе функции C.*

Доказывается эта теорема с помощью используемого в интегральной геометрии преобразования Радона (см. ([1])).

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск
Кзыл-Ординский педагогический институт им. Н. В. Гоголя

Поступило
2 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы представлений, сер. Обобщенные функции, в. 5, М., 1962. [2] М. М. Лаврентьев, ДАН, **160**, № 1, 32 (1965). [3] М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, ДАН, **171**, № 6, 1279 (1966). [4] М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, В. Г. Васильев, Многомерные обратные задачи дифференциальных уравнений, Новосибирск, 1969. [5] В. Г. Романов, Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа, Новосибирск, 1969. [6] С. Елубаев, ДАН, **189**, № 3, 461 (1969). [7] С. Елубаев, Вестн. АН Каз. ССР, Алма-Ата, № 5, 71 (1971).