Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 5

УДК 517.948 **МАТЕМАТИКА**

Н. Б. ЕНГИБАРЯН, М. А. МНАЦАКАНЯН

К РЕШЕНИЮ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 1 IX 1972)

В настоящей заметке предлагается новый метод решения одного класса парных интегральных уравнений ([1, 2]), основанный на принципе инвариантности Амбарцумяна. Последний ранее применялся к решению различных классов уравнений в свертках ([3–6]).

1. Пусть E — комплексное банахово пространство и B — банахова алгебра с единицей I линейных ограниченных операторов, действующих в E. Рассмотрим парное уравнение

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_0(x-t) f(t)\, dt, \quad x > 0,$$
$$\tag{1}$$
$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-t) f(t)\, dt, \quad x < 0,$$

где $g(x)$ и $K_m(x)$, $m = 0, 1$, принимают значения из E и B соответственно, причем

$$\|g(x)\|_E \in M(-\infty, \infty), \quad \|K_m(x)\|_B \in L_1(-\infty, \infty).$$

Перепишем (1) в виде следующей системы:

$$f_m(x) = g_m(x) + \sum_{j=0}^{1} \int_0^{\infty} K_m[(-1)^m x - (-1)^j t]\, f_j(t)\, dt, \quad x > 0, \tag{2}$$

где

$$f_m(x) = f[(-1)^m x], \quad g_m(x) = g[(-1)^m x], \quad x > 0.$$

Будем считать, что первое собственное число матрицы — ядра системы по модулю больше единицы.

Предположим, что $K_m(x)$ представлены в виде

$$K_m(\pm x) = \int_a^b G_m(s) e^{-\alpha(\pm s)x}\, ds; \quad \operatorname{Re}\alpha(s) > 0, \quad x > 0. \tag{3}$$

В частном случае, когда $\|K_m(x)\|_B \in e^{-h|x|} L_p(-\infty, \infty)$; $h > 0$; $p = 1, 2$, представление (3) будет иметь место, если принять $a = -\infty$, $b = \infty$,

$$G_m(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_m(x) e^{h|x|} e^{isx}\, dx, \quad \alpha(s) = h + is.$$

Наряду с (2) рассмотрим вспомогательную систему

$$y_{mk}(x, s) = e^{-\alpha[(-1)^m s]x} \delta_{mk} + \sum_j \int_0^{\infty} K_m[(-1)^m x - (-1)^j t]\, y_{jk}(t, s)\, dt \tag{4}$$

относительно оператор-функций $y_{mk}(x, s)$ со значениями из B.

Если

$$g_k(x) = \int \bar{g}_k(s) e^{-\alpha(s)x} ds,$$

то решение системы (2) выражается через y_{mk} следующим образом:

$$f_m(x) = \sum (-1)^k \int y_{mk}(x, s) \bar{g}_k [(-1)^k s] ds. \quad (5)$$

2. Займемся решением системы (4). Введем обозначения

$$\alpha_k(s) = (-1)^k \alpha [(-1)^k s]; \quad \varphi_{pk}(s) = y_{pk}(0, s); \quad \varphi_k(s) = \sum_p (-1)^p \varphi_{pk}(s). \quad (6)$$

Дифференцируя (4) по x, имеем

$$(-1)^m \frac{\partial y_{mk}(x, s)}{\partial x} = -\alpha_k(s) e^{-\alpha[(-1)^m s]x} \delta_{mk} + K_m[(-1)^m x] \varphi_k(s) +$$

$$+ \sum_j \int_0^\infty K_m [(-1)^m x - (-1)^j t] \left[(-1)^j \frac{\partial y_{jk}(t, s)}{\partial t}\right] dt. \quad (7)$$

Сравнение систем (4) и (7), с учетом (3), приводит к следующим соотношениям между их решениями:

$$(-1)^m \frac{\partial y_{mk}(x, s)}{\partial x} = -\alpha_k(s) y_{mk}(x, s) + \left[\sum_q \int y_{mq}(x, t) G_q(t) dt\right] \varphi_k(s). \quad (8)$$

Введем обозначения:

$$W_{mk}(z, s) = \int_0^\infty y_{mk}(x, s) e^{-\alpha[(-1)^m z]x} dx, \quad (9)$$

$$\sigma_m(z) = \sum_q \int W_{mq}(z, s) G_q(s) ds. \quad (10)$$

Умножая (8) на $\exp\{-\alpha[(-1)^m z]x\}$ и интегрируя по x от 0 до ∞, получаем

$$\alpha_m(z) W_{mk}(z, s) - (-1)^m \varphi_{mk}(s) = -\alpha_k(s) W_{mk}(z, s) + \sigma_m(z) \varphi_k(s).$$

Отсюда

$$W_{mk}(z, s) = \frac{\sigma_m(z) \varphi_k(s) + (-1)^m \varphi_{mk}(s)}{\alpha_m(z) + \alpha_k(s)}. \quad (11)$$

Подставим в (4) $x = 0$. С учетом (3) имеем

$$\varphi_{mk}(z) = \delta_{mk} + \int G_m(-s) \sum W_{jk}(z, s) ds. \quad (12)$$

Мы получили замкнутую систему (10)—(12) функциональных уравнений относительно $\{\sigma_m\}$, $\{\varphi_{mk}\}$ и $\{W_{mk}\}$.

3. Система (10)—(12) может быть приведена к системе двух линейных сингулярных уравнений, если использовать следующие два соотношения, существующие между функциями $\varphi_{mk}(s)$ и $\sigma_m(s)$:

$$\varphi_{m\bar{m}}(s) = (-1)^{\bar{m}} \sigma_m(-s) \varphi_{\bar{m}}(s), \quad \bar{m} = 1 - m. \quad (13)$$

Они следуют из (11), если заметить, что при $k = \bar{m}$ и $z = -s$ знаменатель правой части обращается в нуль, в то время как $W_{m\bar{m}}(z, s)$, согласно (9), не имеет особенности на линии $z = -s$. Следовательно, при этом и числитель правой части (11) должен равняться нулю. Соотношения (13) могут быть установлены также непосредственно из (10)—(12).

Используя (13) и (6) и вводя обозначения

$$\varphi_m^-(z) = \sigma_m(z) + \delta_{0m}, \quad \varphi_m^+(z) = (-1)^{\bar{m}} \varphi_{\bar{m}}(-z),$$

перепишем (11) в виде

$$W_{m\bar{k}}(z,-s)=\frac{(-1)^{\bar{k}}\varphi_{m}^{-}(z)-(-1)^{\bar{m}}\varphi_{k}^{-}(s)}{\alpha_{m}(z)-\alpha_{k}(s)}\varphi_{k}^{+}(s). \tag{14}$$

Отсюда

$$\sum_{j}W_{j\bar{k}}(s,-z)=(-1)^{\bar{k}}\,V_{k}(s,z)\,\varphi_{k}^{+}(z),$$

где

$$V_{k}(s,z)=\frac{\varphi_{\bar{k}}^{-}(s)+\varphi_{k}^{-}(z)}{\alpha_{\bar{k}}(s)-\alpha_{k}(z)}+\frac{\varphi_{k}^{-}(s)-\varphi_{k}^{-}(z)}{\alpha_{k}(s)-\alpha_{k}(z)}. \tag{15}$$

Умножим (12) на $(-1)^m$ и просуммируем по m:

$$\varphi_{k}^{+}(z)=I+\left[\int Q(s)\,V_{k}(s,z)\,ds\right]\varphi_{k}^{+}(z); \tag{16}$$

здесь

$$Q(s)=\sum_{m}Q_{m}(s),\qquad Q_{m}(s)=(-1)^{m}G_{m}(-s).$$

Полагая теперь в (12) $k=\bar{m}$ и используя (13) и (6), получим

$$\varphi_{\bar{m}}^{-}(z)=\delta_{0m}-\int Q_{m}(s)\,V_{m}(s,z)\,ds. \tag{17}$$

Итак, нами получена система линейных уравнений

$$\varphi_{k}^{-}(z)=\delta_{0k}-\int Q_{k}(s)\left[\frac{\varphi_{\bar{k}}^{-}(s)+\varphi_{k}^{-}(z)}{\alpha_{\bar{k}}(s)-\alpha_{k}(z)}+\frac{\varphi_{k}^{-}(s)-\varphi_{k}^{-}(z)}{\alpha_{k}(s)-\alpha_{k}(z)}\right]ds \tag{18}$$

относительно оператор-функций $\varphi_k^-(z)$. Согласно (16), $\varphi_k^+(z)$ выражаются через $\varphi_k^-(z)$:

$$\varphi_{k}^{+}(z)=\left[I+\int Q(s)\,V_{k}(s,z)\,ds\right]^{-1}. \tag{19}$$

4. Зная оператор-функции $\varphi_k^-(z)$ и $\varphi_k^+(z)$, решение системы (4) можно найти либо обращением преобразования (9) с использованием (14), либо следующим путем.

Умножим (8) на $(-1)^m e^{(-1)^m\alpha_k(s)x}$ и проинтегрируем по x от 0 до x:

$$y_{mk}(x,s)=\varphi_{mk}(s)\,e^{-(-1)^{m}\alpha_{k}(s)x}+\left[\int_{0}^{x}e^{-(-1)^{m}\alpha_{k}(s)[x-t]}\Phi_{m}(t)\,dt\right]\varphi_{k}(s); \tag{20}$$

здесь

$$\Phi_{m}(x)=(-1)^{m}\sum_{q}\int y_{mq}(x,s)\,G_{q}(s)\,ds.$$

Умножая (20) на $G_k(s)$, интегрируя по s и суммируя по k, получаем следующее уравнение Вольтерра относительно $\Phi_m(x)$:

$$\Phi_{m}(x)=L_{m}(x)+\int_{0}^{x}\Phi_{m}(t)\,\bar{L}_{m}(x-t)\,dt, \tag{21}$$

где

$$L_{m}(x)=(-1)^{m}\sum_{k}\int\varphi_{mk}(s)\,e^{-(-1)^{m}\alpha_{k}(s)x}G_{k}(s)\,ds,$$

$$\bar{L}_{m}(x)=(-1)^{m}\sum_{k}\int\varphi_{k}(s)\,e^{-(-1)^{m}\alpha_{k}(s)x}G_{k}(s)\,ds. \tag{22}$$

Функции φ_k и φ_{mk} выражаются посредством φ_k^+ и φ_k^- согласно (6) и (13). Найдя $L_m(x)$ и $\bar{L}_m(x)$ из (22), решаем интегральное уравнение типа свертки (21) относительно $\Phi_m(x)$, после чего решение системы (4) определяется из выражения (20). Заметим, что при численном решении указанный путь позволяет ограничиться только вещественными значениями аргументов.

5. В частном случае, когда $K_1(x) = 0$, парное уравнение (1) обращается в уравнение Винера — Хопфа. В этом случае $\varphi_1^-(z) = 0$ и уравнение (18) для $\varphi_0^- = \varphi$ переходит в уравнение

$$\left[I - \int \frac{G_0(s)\,ds}{\alpha(s) + \alpha(z)}\right] \varphi(z) = I - \int G_0(-s) \frac{\varphi(s) - \varphi(z)}{\alpha(s) - \alpha(z)}\,ds. \tag{23}$$

Выражение (23) представляет собой более удобную запись соответствующего уравнения, полученного в [7].

Авторы выражают признательность акад. В. А. Амбарцумяну за внимание к работе.

Институт математики
Академии наук АрмССР
Ереван

Бюраканская астрофизическая обсерватория

Поступило
30 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Нобл, Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, 1962. [2] И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, «Наука», 1971. [3] В. А. Амбарцумян, Научные тр., 1, Ереван, 1960. [4] В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., 1956. [5] Н. Б. Енгибарян, Докл. АН АрмССР, 54, № 3, 129 (1972). [6] Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян, Докл. АН АрмССР, 55, № 2, 70 (1972). [7] Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, ДАН, 209, № 2 (1973).