Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 5

УДК 517.43 МАТЕМАТИКА

С. А. СМАГИН

ДРОБНЫЕ СТЕПЕНИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В $\mathbf{R}^n$

(Представлено академиком И. Г. Петровским 16 VI 1972)

Пусть $P(x, D)$ — дифференциальный оператор в $\mathbf{R}^n$ с полиномиальными коэффициентами, символ которого $p(x, \xi)$ есть многочлен, гипоэллиптический по (x, ξ). В работе строятся дробные степени такого оператора, определяется дзета-функция и доказывается возможность ее мероморфного продолжения. В статье [1] доказана возможность мероморфного продолжения дзета-функции эллиптического оператора на компактном многообразии. В работе [2] подобным методом строились дробные степени так называемого λ-эллиптического оператора в $\mathbf{R}^n$.

1. Пусть $p_0(x, \xi)$, $x \in \mathbf{R}_x^n$, $\xi \in \mathbf{R}_\xi^n$, — полином по x и ξ степени $m > 0$ с комплексными коэффициентами, и пусть $d(y)$ — расстояние от точки $y = (x, \xi) \in R^{2n}$ до поверхности $\{u \in \mathbf{C}^{2n} | p_0(u) = 0\}$.

Обозначим через Γ класс C^∞-функций $p(y)$, представимых в виде суммы $p(y) = p_0(y) + \varphi(y)$, где $p_0(y)$ — многочлен, а $\varphi(y) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, причем

А) $p(y) \neq it$, $t \geqslant 0$, $y \in \mathbf{R}^{2n}$,

Б) $p_0(y)$ гипоэллиптичен по y, т. е. $d(y) \to +\infty$ при $|y| \to \infty$.

Если $p(y) \in \Gamma$, то при $|y| > C$ выполнены неравенства

$$C_1(1 + |y|) \geqslant d(y) \geqslant c_2(1 + |y|)^\beta, \quad C_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad 1 \geqslant \beta > 0.$$

Обозначим через $S^N = S^N(d)$ пространство C^∞-функций, удовлетворяющих при $|y| \geqslant C$ оценкам

$$|\partial_y^\alpha f| \leqslant C_\alpha d^{N-|\alpha|}; \quad S^\infty = \cup S^N; \quad S^{-\infty} = \cap S^N;$$

$f \simeq g$ означает, что $f - g \in S^{-\infty}$. Через S_k^N обозначим множество функций $f(z, y)$, являющихся полиномами по $z \in \mathbf{C}^k$ с коэффициентами из S^N.

Псевдодифференциальные операторы (п.д.о.) с символами из Γ, S^N или S_k^N определяются при $u \in S(\mathbf{R}^n)$ ($S(\mathbf{R}^n)$ — пространство Шварца) по обычной формуле

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n} \int p(x, \xi) \tilde{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Соответствующие классы п.д.о. также обозначим через Γ, S^N и S_k^N.

Отметим, что если $f_j \in S_k^{N_j}$, $N_0 > N_1 > \ldots \to -\infty$, то существует функция $f_z(y)$, принадлежащая при всех $x \in \mathbf{C}^k$ пространству S^{N_0} и голоморфная по z, такая, что $f_z(y) \sim \sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j$, т. е. функция $F_J(z, y) = f_z(y) - \sum\limits_{j=0}^{J} f_j$ принадлежит $S^{N_{J+1}}$ при всех $z \in \mathbf{C}^k$ и голоморфна по z.

Пусть $Z_+^k = \{(z_1, \ldots, z_k) \in \mathbf{C}^k | z_i > 0, z_i \text{ целое}, i = 1, 2, \ldots, k\}$.

Лемма 1 (см. [2]). *Пусть* $f_j^{(r)} \in S_k^{N_j}$, $N_0 > N_1 > \ldots \to -\infty$, $r = 1, 2$. *Пусть* $f_z^{(r)}(y) \in S^{N_0}$, а $f_z^{(r)} - \sum\limits_{j=0}^{J} f_j^{(r)} \in S^{N_{J+1}}$ *для любого* $z \in \mathbf{C}^k$, *и пусть при всех* $z \in Z_+^k$ $f_z^{(1)}(y) \simeq f_z^{(2)}(y)$.

Тогда $f_z^{(1)}(y) \simeq f_z^{(2)}(y)$ *при всех* $z \in \mathbf{C}^k$.

2. Пусть $P(x, D) \in \Gamma$. Используя несколько раз формулу композиции, получим, что при целом $N \geqslant 0$

$$\sigma(P^N) = p^N + \sum C_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_k} \partial^{\gamma_1} p \ldots \partial^{\gamma_k} p \cdot p^{N-k},$$

где $k \leqslant N$, $|\gamma_1 + \ldots + \gamma_k| = 0 \ (\mathrm{mod}\, 2)$, а $C_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_k}(N)$ — полином от N. $\sigma(P^N)$ можно представить в виде

$$\sigma(P^N) = p^N \Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} q_j(N, y)\Big), \text{ где } q_j = \sum_{|\gamma_1+\ldots+\gamma_k|=2j} C \cdot \partial^{\gamma_1} p \ldots \partial^{\gamma_k} p \cdot p^{-k},$$

$q_j \in S_1^{-2j}$. При этом для любого N существует такое J_N, что $q_j(N) = 0$ для $j > J_N$.

Определение 1. Степенным семейством оператора $P \in \Gamma$ называется семейство п.д.о. P_z с символами

$$p_z(y) \sim p^z(1 + \sum q_j(z, y)).$$

Из леммы 1 следует:

1) $\sigma(P_z P_w) \simeq p_{z+w}$; $\sigma((P_z)^*) \simeq (\sigma(P^*))\bar{z}$;

2) если $p^{(1)} \simeq p^{(2)}$, то $p_z^{(1)} \simeq p_z^{(2)}$ при всех $z \in \mathbf{C}$.

Определение 2. Дзета-функцией $\zeta(z)$ оператора $P(x, D) \in \Gamma$ называется интеграл $\zeta(z) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^{2n}} p_z(y)\, dy$. Заметим, что этот интеграл сходится абсолютно при $\operatorname{Re} z < -(n+1) / m\beta$, ибо $|p(y)| \geqslant c_0(1 + |y|)^{m\beta}$.

Теорема 1. *Дзета-функция $\zeta(z)$ оператора $P \in \Gamma$ обладает следующими свойствами*:

1) $\zeta(z)$ *аналитична в полуплоскости* $\operatorname{Re} z < -(n+1) / m\beta$;

2) $\zeta(z)$ *аналитически продолжается во всю плоскость* $\mathbf{C}$ *комплексного переменного до мероморфной функции с полюсами кратности не выше* $2n$ *на конечном числе вещественных арифметических прогрессий;*

3) *первый полюс функции* $\zeta(z)$ *и разложение Лорана в нем совпадают с первым полюсом и разложением Лорана для интеграла*

$$I_0(z) = (2\pi)^{-n} \int p^z dy.$$

Доказательство теоремы 1 сводится к доказательству утверждений 1), 2) для каждого из интегралов $I_k(z) = (2\pi)^{-n} \int p^z q_k(y)\, dy$. Обозначим через B_R шар радиуса R в $\mathbf{R}^{2n}$; тогда

$$I_k = I_{k1} + I_{k2} = \int_{B_R} \ldots + \int_{\mathbf{R}^{2n} \setminus B_R} \ldots$$

I_{k1} с очевидностью продолжается до целой функции. Делая в I_{k2} замену переменных $y_i = u_i / |u|^2$, получим

$$I_{k2}(z) = (2\pi)^{-n} \int \frac{A^z(u)\, B_k(z, u)}{|u|^{4n}}\, du,$$

где A и B_k — рациональные функции (B_k — полином от z). На такие интегралы распространяется основная теорема работы [3], что и доказывает теорему 1.

3. Пусть P — положительный самосопряженный оператор, комплексные степени которого P^z при достаточно большом отрицательном $\operatorname{Re} z$ являются ядерными операторами. Тогда дзета-функция стандартно определяется как $\zeta_0(z) = \operatorname{tr} P^z$.

Заметим, что если оператор $P \in \Gamma$ симметрический, то он полуограничен. Мы будем для простоты формулировок считать его положительным. Далее, при $|y| > C$ $|\operatorname{Im} p(y)| \leqslant C_1 |\operatorname{Re} p(y)|^{1-2\beta/m}$, поэтому $\operatorname{ind}\operatorname{def} P = (0, 0)$ (см. [4], теорема 4) и для самосопряженного оператора P определены (в смысле спектральной теории) комплексные степени P^z.

Лемма 2. 1) *P^z — п.д.о. с символом из S^∞; символ P^z представим в виде*

$$\sigma(P^z) \sim p^z\Big(1 + \sum_j \sum_{|\gamma_1+\ldots+\gamma_k|=2j} (-1)^k \frac{z(z-1)\ldots(z-k+1)}{k!} \partial^{\gamma_1}p \ldots \partial^{\gamma_k}p \cdot p^{-k}\Big) = $$
$$= p^z\Big(1 + \sum_j s_j(z, y)\Big),$$

где $s_j \in S_1^{-2j}$.

2) *при достаточно большом отрицательном* $\operatorname{Re} z$

$$\zeta_0(z) = (2\pi)^{-n}\int \sigma(P^z)\, dy.$$

Лемма 2 доказывается так же, как соответствующие утверждения в работе ([1]). Поскольку при $z \in Z_+^1$ $P_z = P^z$, из лемм 1, 2 следует

Теорема 2. *Пусть оператор $P \in \Gamma$ симметрический. Тогда определены комплексные степени P^z оператора P, причем*

1) *$P_z \simeq P^z$, а разность, как оператор порядка $-\infty$, равномерно ограничена при $|z| < R$ для любого R.*

2) *$\zeta(z) - \zeta_0(z)$ аналитически продолжается до целой функции z.*

Отметим теперь следующее простое утверждение. Пусть функция $f(t)$ монотонно возрастает, и пусть $F(z) = \int_1^\infty t^z\, df(t)$ сходится и аналитична при $\operatorname{Re} z < -w$, а при $z \to w$ $F(z)\cdot(z+w)^k \to A \neq 0$, где $k > 0$ — некоторое целое число. Тогда из тауберовой теоремы Икехара (см. ([5])) следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^w(\ln t)^k} = \frac{(-1)^{k-1}A}{(k-1)!}.$$

Поэтому знание первого полюса дзета-функции $\zeta_0(z)$ позволяет найти асимптотику собственных значений оператора P. Именно, если P^z — ядерный оператор, то $\zeta_0(z) = \int t^z\, dN(t)$, где $N(t)$ — число собственных значений оператора P, не превосходящих t (с учетом кратности). Тогда справедлива

Теорема 3. *Пусть $P \in \Gamma$ — самосопряженный оператор. Тогда при $t \to \infty$*

$$N(t) \sim (2\pi)^{-n} \int_{\{y:\ |p(y)|<t\}} dy \sim (2\pi)^{-n} \int_{\{y:\ \operatorname{Re} p(y)<t\}} dy \sim Ct^w(\ln t)^k,$$

где $(-w)$ — первый полюс дзета-функции, а k — его кратность.

Отметим, что аналогичный результат содержится в теореме 13 работы ([6]).

Автор выражает искреннюю благодарность М. А. Шубину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
26 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. T. Seeley, Am. J. Math., 91, 4, 889 (1969). [2] M. Nagase, K. Shinkai, Proc. Japan Acad., 46, 7, 779 (1970). [3] И. Н. Бернштейн, С. И. Гельфанд, Функциональн. анализ и его прилож., 3, 1, 84 (1969). [4] М. А. Шубин, ДАН, 196, № 2, 316 (1971). [5] Н. Винер, Интеграл Фурье и некоторые его приложения, М., 1963. [6] Ф. А. Березин, Математич. сборн., 86, 4, 578 (1971).